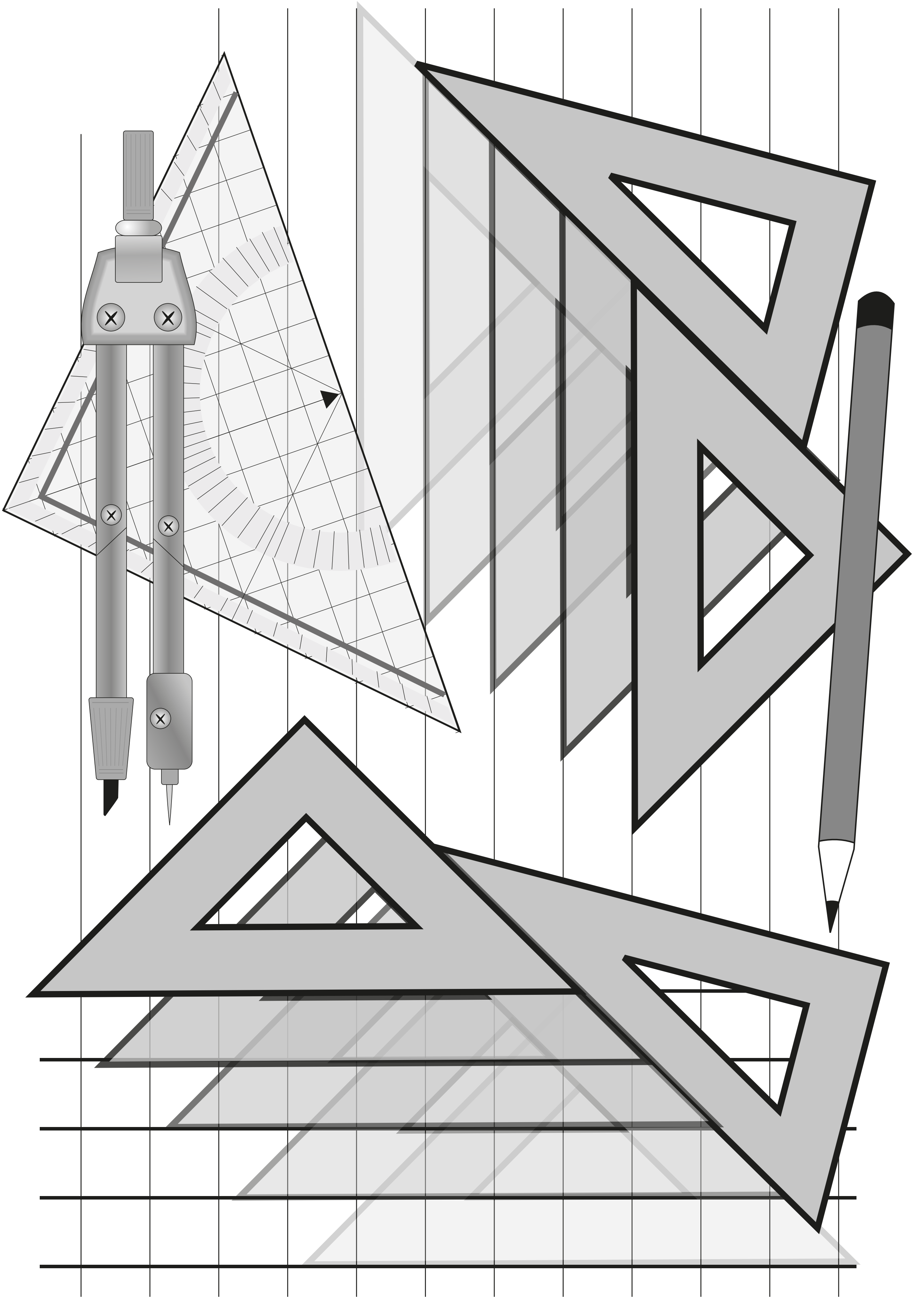
1- TRAZADOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS



INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

GEOMETRÍA: Es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de propiedades de puntos, rectas. polígonos, etc. Proviene del Griego GEO (tierra) METROS (medida). Podemos clasificar la Geometría den dos clases:

● **GEOMETRÍA PLANA**: Estudia las propiedades de elementos con una o dos dimensiones. Es decir, solo se ocupa de todo lo que puede suceder en un plano.

● **GEOMETRÍA ESPACIAL**: También se llama geometría descriptiva y estudia las figuras y todo lo que puede suceder en las tres dimensiones. Fundamentalmente se ocupa de la representación de objetos o figuras tridimensionales sobre un plano (el papel) que tiene únicamente dos dimensiones.

PUNTO, RECTA, SEMIRECTA Y SEGMENTO

PUNTO: Geométricamente podemos definir un punto de tres formas: Intersección de dos rectas o arcos, Intersección de una recta con un plano, Circunferencia de radio 0.

RECTA: Es una suceción de puntos en una misma dirección. Según esta definición una recta es infinita y solo la podemos concebir virtualmente y no realmente, ya que todos los soportes (papeles, lienzos, la pizarra de clase) son finitos. Una recta puede ser definida geométricamente por dos planos que se cortan (geometría descriptiva) o por dos puntos (geometría plana).

SEMIRECTA: Es una porción de recta delimitada por un punto.

SEGMENTO: Es una porción de recta delimitada por dos puntos, por tanto tiene principio y fin, es finito y se puede medir. Realmente todas las rectas que dibujamos son segmentos, pues empiezan y acaban en algún sitio. Por eso, para dibujar un segmento se suelen marcar claramente los puntos de principio y fin.

RELACIONES ENTRE RECTAS O SEGMENTOS

Dos rectas o segmentos pueden guardar tres tipos diferentes de relaciones:

● **PARALELAS**: Todos los puntos de las dos rectas están siempre a la misma distancia. Es decir, dos rectas paralelas nunca se cortan.

● **PERPENDICULARES**: Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando cuatro ángulos rectos. Este concepto esta relacionado con un adjetivo importante, **ortogonal**: decimos que dos rectas son ortogonales cuando formán ángulos de 90º, son rectos o perpendiculares.

● **OBLICUAS**: dos rectas oblicuas se cortan sin formar ángulos rectas

LA CIRCUNFERENCIA

TRES PUNTOS determinan en el plano una circunferencia. Dados tres puntos siempre podremos trazar una circunferencia. En términos tridimensionales tres puntos definen un plano. Una silla con tres patas nunca estará coja.

Una **circunferencia** es un conjunto de puntos que están a la misma distancia de otro punto llamado centro. Es una curva cerrada y plana cuyos puntos **EQUIDISTAN** (están a la misma distancia) del centro. Llamamos **RADIO** a la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos d ela circunferencia.

CÍRCULO: Es la porción de plano comprendida dentro de la circunferencia

RELACIONES CIRCUNFERENCIA - CIRCUNFERENCIA / CIRCUNFERENCIA - RECTA

SECANTES: Se cortan. Cuando dos circunferencias o una recta y una circunferencia se cortan producen dos puntos de intersección. Para una circunferencia y un segmento secantes encontramos:

● **Cuerda**: Porción de recta que queda dentro de la circunferencia y no pasa por el centro.

● **Diámetro**: Segmento que corta a la circunferencia en dos puntos pasando por el centro.

● **Arco**: Porción de circunferencia que queda entre los dos puntos de intersección con otra circunferencia o recta.

● **Flecha**: Radio perpendicular a una cuerda de circunferencia.

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES: Una recta y una circunferencia son tangentes cuando se tocan pero no se cortan. En esos caso ambos elementos comparten en común un punto llamado punto de tangencia.

CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES: Se llama así a dos circunferencias o una circunferencia y una recta que no se tocan ni se cortan.

CIRCUNFERENCIAS INTERIORES: Se dice que una “circunferencia es interior a otra" cuando está dentro de otra mayor y ni se tocan ni se cortan.

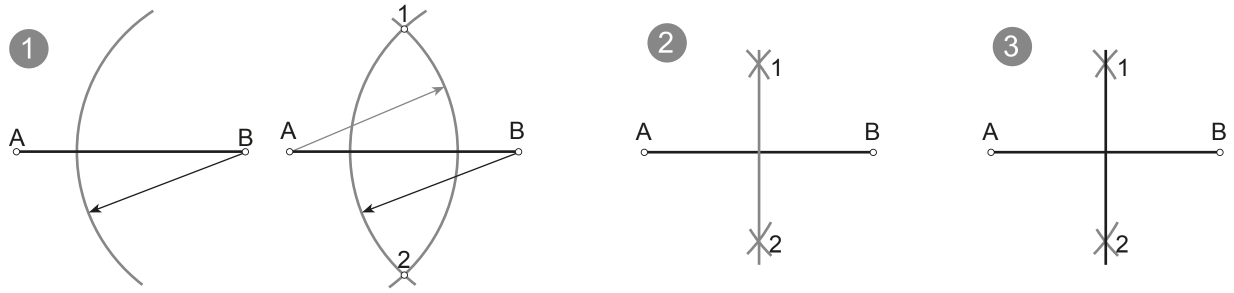
CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS: Se llaman así las circunferencias que comparten el mismo centro.

Mediatriz de un segmento:

Dado un segmento AB, hallar la mediatriz.

La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a este por su punto medio. Procedimiento:

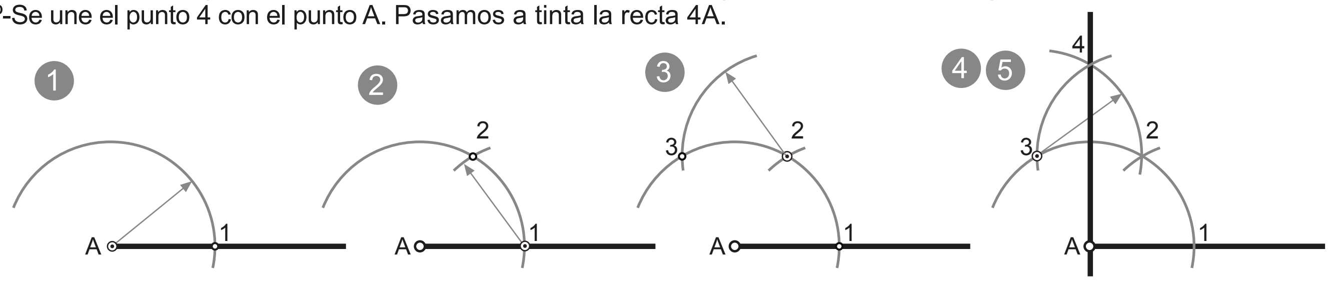
1º- Se trazan dos arcos de igual rádio con centro en ambos extremos A y B. Se obtienen así los puntos 1 y 2 donde ambos arcos se cortan.
2º- Se unen los puntos 1 y 2 para obtener la mediatriz.
3º- Se pasa el resultado a tinta.



Perpendicular a un segmento o semirecta por un extremo:

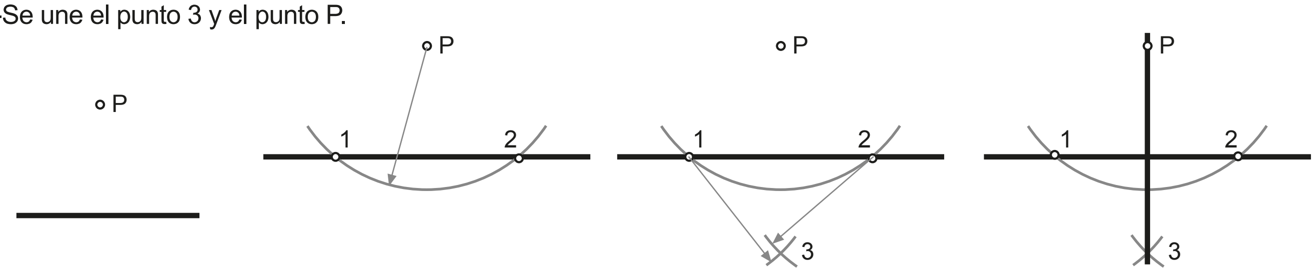
Dado un segmento AB, trazar la perpendicular por el punto A.

1º-Con centro en A se traza un arco (casi una semicircunferencia) que corta al segmento en el punto 1.
2º-Con centro en el punto 1 se traza otro arco con el mismo radio que corta al anterior arco en el punto 2.
3º-Con centro en el punto 2 y mismo radio se traza otro arco que corta al primero en el punto 3.
4º-Con centro en el punto 3 trazamos otro arco, de mismo radio, que corta al último en el punto 4.
5º-Se une el punto 4 con el punto A. Pasamos a tinta la recta 4A.



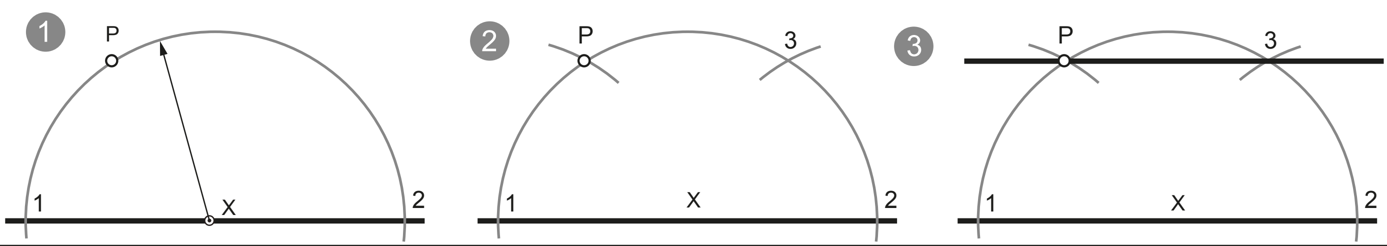
Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella:

1º-Con centro en P se traza un arco de circunferencia que corte a la recta en dos puntos: 1 y 2.
2º-Con centro en los puntos 1 y 2, se trazan dos arcos de radio mayor a la mitad de la distancia entre ellos.Donde ambos arcos se cortan obtenemos el punto 3.
3º-Se une el punto 3 y el punto P.



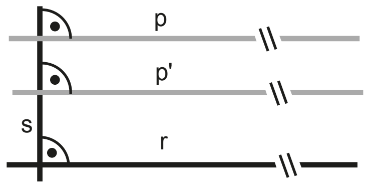
Paralela a una recta por un punto exterior:

1º- Se elige un punto X centrado en la recta como centro y se traza una semicircunfenerncia de radio XP que la corta en dos puntos: 1 y 2.
2º- Con centro en el punto 1 se toma el radio 1P y desde el punto 2 se traza un arco que corta al primero en el punto 3.
3º- Se une el punto 3 con P.

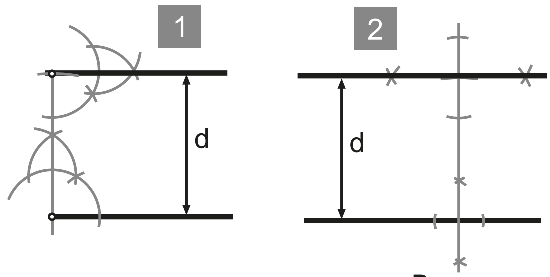


Paralela a una recta a una distancia dada (d) :

La distancia entre una recta y otra es la medida que se toma sobre una recta perpendicular a ambas.
Si tenemos una recta (r), y una recta prependicular (s), cualquier recta perpendicular (p) a (s) será paralela a (r).

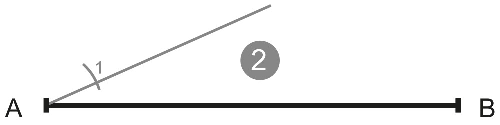


Por lo tanto podemos emplear cualquiera de los metodos de "perpendicularidad" para resolver este problema. A la derecha te mostramos dos de ellos.



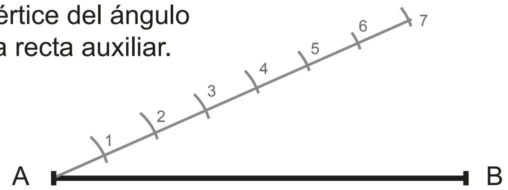
DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN n (7) partes iguales:

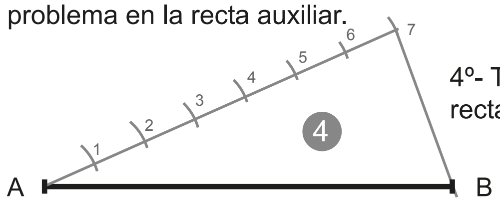
1º- Desde un extremo del segmento dado trazamos una recta auxiliar. No importa la abertura del ángulo que esta forme con el segmento dado.



2º- Tomamos un radio con el compás (no importa la abertura, solo que quepa tantas veces como divisiones nos pide el problema sobre la recta auxiliar) y con centro en el vértice del ángulo trazamos una marca sobre la recta auxiliar.

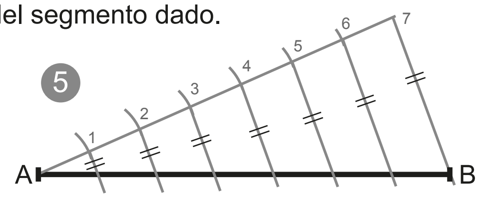
3º- Con centro en esa primera marca, y con el mismo radio de compás repetimos la operacion hasta tener tantas partes como nos pide el problema en la recta auxiliar.

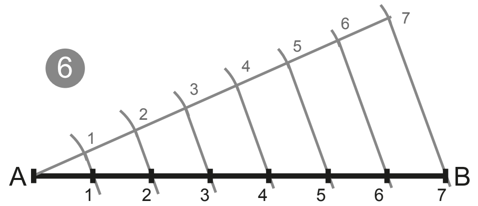




4º- Trazamos un segmento que une la ÚLTIMA DIVISIÓN de la recta auxiliar con EL EXTREMO B del segmento dado.

5º- Trazamos paralelas a la última recta pasada. estas pasan por las divisiones que hemos trazado sobre la recta auxiliar y cortan al segmento dado en el enunciado del problema.





6º- Los puntos de corte de las paralelas con el segmento dado son la solución, las divisiones del segmento en el nº de partes que pedía el enunciado.

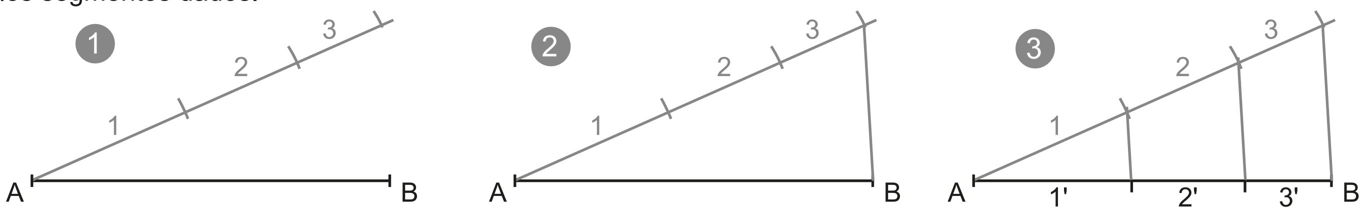
División de un segmento AB en PARTES PROPORCIONALES a los segmentos 1, 2 y 3 DADOS:

El procedimiento es el mismo que el anterior. Esta vez en lugar de dividir el segmento auxiliar en partes iguales copiaremos, uno tras otro los tres segmentos dados.

1º- A partir del punto A trazamos un segmento auxiliar sobre el cual copiamos con el compás las magnitudes de los segmentos según los cuales se quiere dividir el segmento AB.

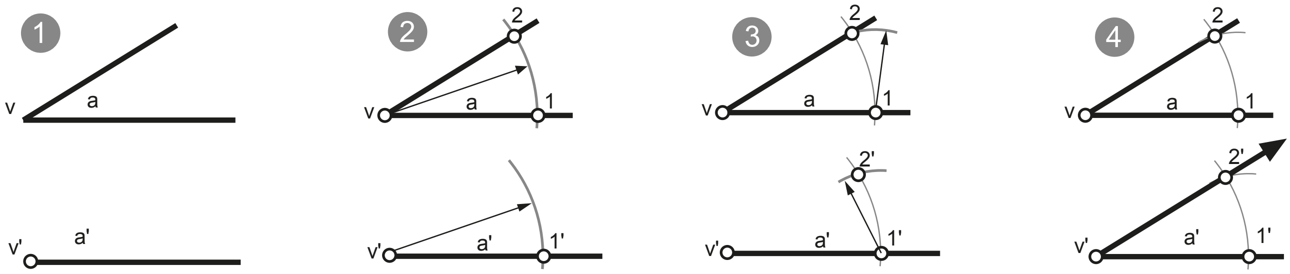
2º- Unimos el último punto del segmento auxiliar con los tres segmentos copiados uno tras otro con el extremo B del segmento a dividir proporcionalmente.

3º- Trazamos paralelas al segemento trazado de modo que el segmento Ab queda dividido en partes proporcionales los segmentos dados.



COPIA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dado un ángulo (a) trazar otro ángulo (a') igual.

1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vértice del nuevo ángulo copiado.
2º- Con centro en el punto v se traza un arco de radio cualquiera que corta los lados de este en los puntos 1 y 2. Con centro en v' se traza un arco de igual radio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1 del ángulo dado, se mide con el compás la distancia desde 1 hasta 2. En el nuevo ángulo copiado con centro en 1' se traza un arco que corte al anterior obteniendo 2'
4º- Se une v' con 2'.



BISECTRIZ DE UN ÁNGULO:

Es la semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales pasando por el vértice.

Todos los puntos de la bisectriz equidistan (están a la misma distancia)de los lados del ángulo.

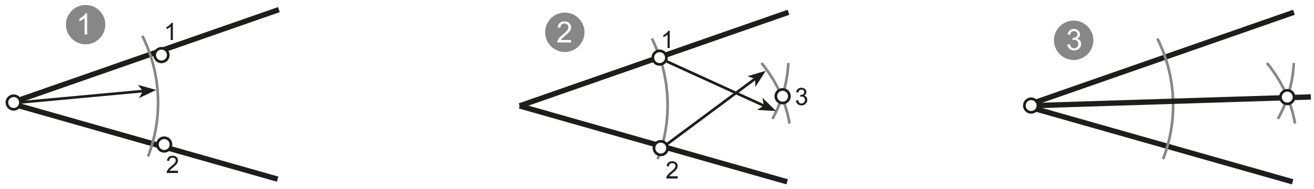
La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los lados de un ángulo.

TRAZADO DE LA BISECTRIZ: Dado un angulo a, trazar su bisectriz.

1º- Con centro en el vértice y un radio cualquiera (suficientemente amplio) se traza un arco que corta a ambos lados del ángulo en los puntos 1 y 2.

2º- Con centros en los puntos 1 y dos se trazan dos arcos de igual radio (mayor a la mitad de la distancia entre 1 y 2) que se cortan en el punto 3.

3º- Se une el punto 3 con el vértice del ángulo dado.



TRAZADO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DEL QUE SE DESCONOCE EL VÉRTICE:

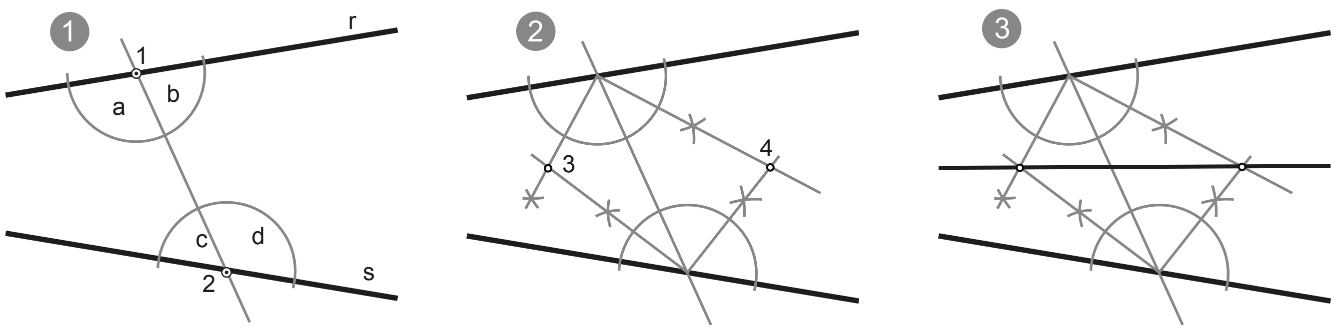
Dadas dos rectas, no paralelas: r y s, trazar su bisectriz.
Existen dos métodos para resolver este problema.

MÉTODO 1: Recta que corta a ambos lados del ángulo.

1º- Se traza una recta que corta a ambos lados del ángulo en los puntos 1 y 2. De este modo, 1 y 2 se convierten en vértices de 4 ángulos: a b, c y d

2º- Se trazan las bisectrices de los angulos a, b, c y d. Las bisectrices se cortan en dos puntos: 3 y 4

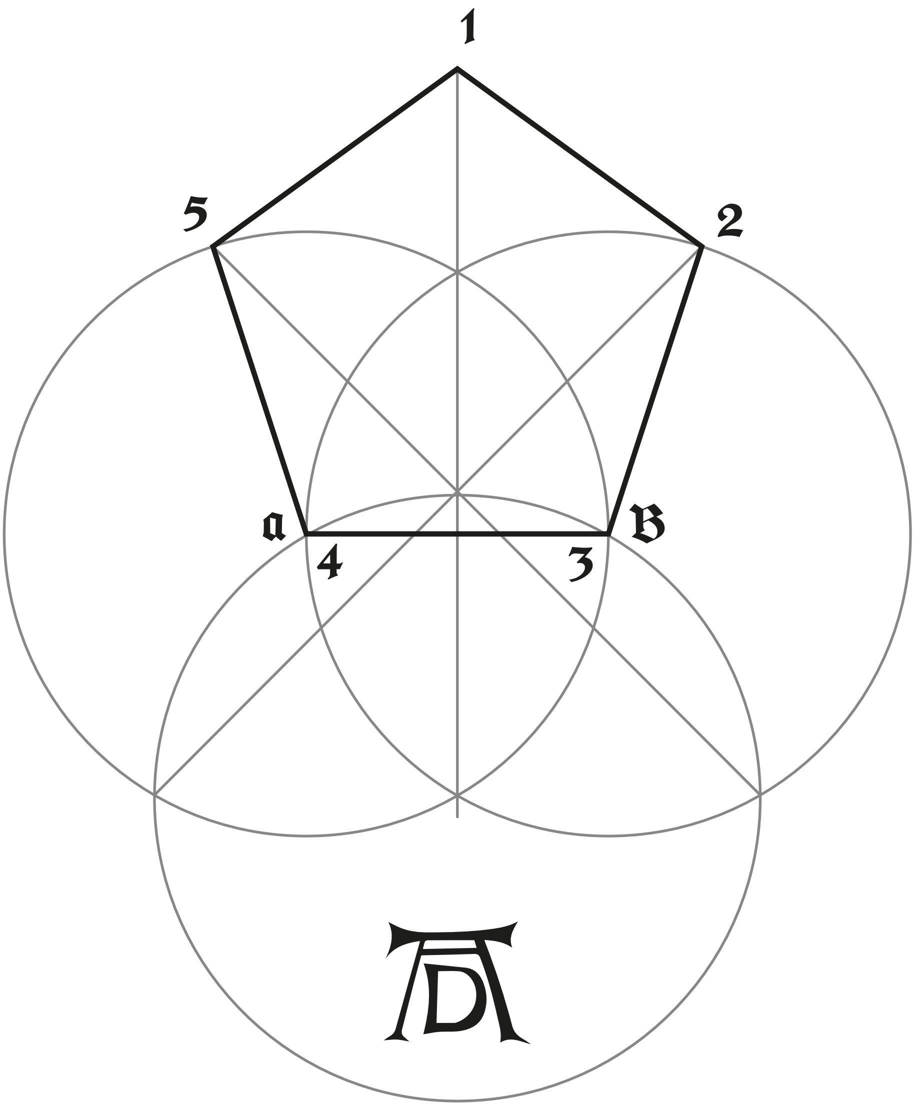
3º- Se une el punto 3 con el 4.



MÉTODO 1: Contracción uniforme del ángulo hasta obtener un vértice

Se trazan paralelas interiores al ángulo, una a cada lado del ángulo, a la misma distancia con la finalidad de obtener un nuevo ángulo que sí que muestre su vértice. Al nuevo ángulo se le traza la bisectriz que es compartida con el ángulo dado.

2- POLÍGONOS

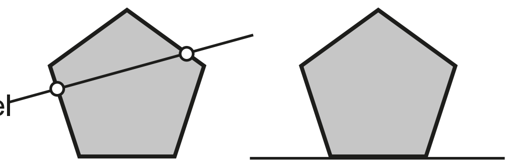


LOS POLÍGONOS

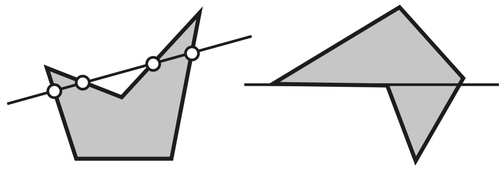
Un polígono es la porción de plano encerrada por varios segmentos llamados lados. El término "polígono" procede del griego antiguo y significa "muchos" (poli) ángulos (gono).

CLASIFICACIONES

Polígono convexo: Es aquel polígono que al ser atravesado por una recta únicamente tiene o puede tener un punto de intersección de entrada y otro de salida. Un polígono es convexo si al apoyarse en uno de sus lados sobre una recta el polígono queda en su totalidad a un lado de esta.



Polígono concavo: Es aquel que al ser atravesado por una recta tiene mas de un punto intersección de entrada y salida en la trayectoria de la recta. También es convexo cuando es posible apoyar el poligóno sobre alguno de sus lados en una recta quedando parte a un lado de esta y parte al otro.



Equiángulo: Un polígono es equiángulo cuando tiene todos sus ángulos iguales.
Equilátero: Un polígono es equilátero cuando todos sus lados soon iguales.
Regular: Un polígono es regular cuando todos sus lados y ángulos son iguales.
Irregular: Es el polígono que tiene lados y ángulos desiguales

LOS NOMBRES DE LOS POLÍGONOS SEGÚN SUS LADOS

3	Triángulo	12	Dodecágono
4	Cuadrilátero	13	Triskaidecágono
5	Pentágono	14	Tetradecágono
6	Hexágono	15	Pentadecágono
7	Heptágono	16	Hexadecágono
8	Octógono	17	Heptadecágono
9	Eneágono	18	Octodecágono
10	Decágono	19	Eneadecágono
11	Ondecágono		

DECENAS		Y	UNIDADES				OTROS
20	Icosa-	kay	1	-hená- / -monó-	-gono	100	Hectógono / Hectágono
30	Triaconta-		2	-dí-		1000	Kiliágono
40	Tetraconta-		3	-trí-		10000	Miriágono
50	Pentaconta-		4	-tetrá-			
60	Hexaconta-		5	-pentá-			
70	Heptaconta-		6	-hexá-			
80	Octaconta-		7	-heptá-			
90	Eneaconta-		8	-octá-			
			9	-eneá-			

PARTES DE UN POLÍGONO

LADO: Cada uno de los segmentos que componen el polígono.

VÉRTICE: Es el punto en el que se unen dos lados consecutivos.

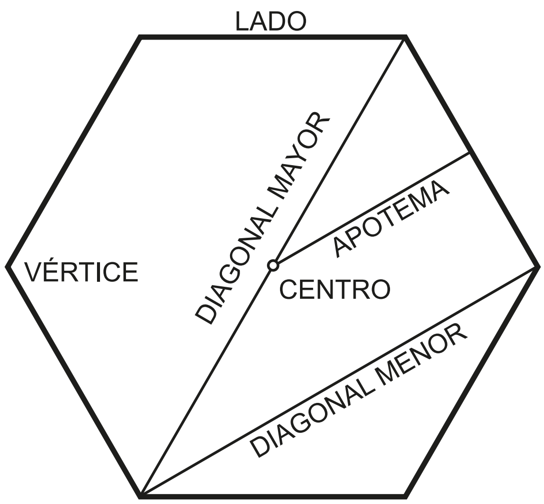
DIAGONAL: Segmento que une dos vértices no consecutivos. Algunos polígonos tienen diagonal mayor y diagonal menor.

PERÍMETRO: Es la suma de todos los lados.

En un polígono regular además encontramos:

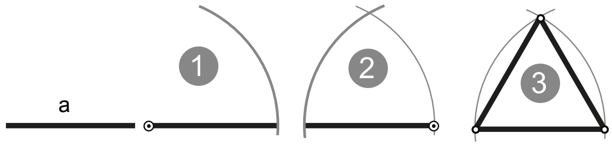
CENTRO: Es el punto equidistante de todos los vértices y lados. En el se encuentra el centro de las circunferencias inscrita y circunscrita.

APOTEMA: Es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de los lados perpendicularmente.



Dado el lado a, construcción de polígonos regulares:

Triángulo equilátero



1º- Con centro en un extremo del lado dado trazar un arco de igual radio al lado.

2º- Con centro en el otro extremo repetir la operación.

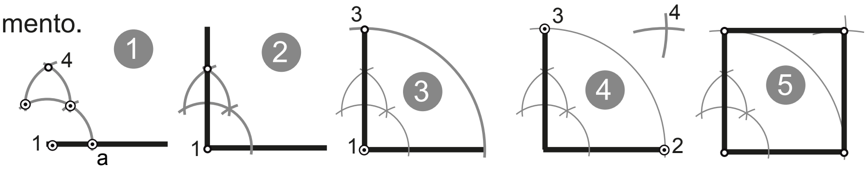
3º- El punto donde se cortan ambos arcos es el tercer vértice del triángulo. Unir este con los extremos del segmento.

Cuadrado

1º- Perpendicular por un extremo de un segmento.

2º- Se une el punto 4 con el vértice 1.

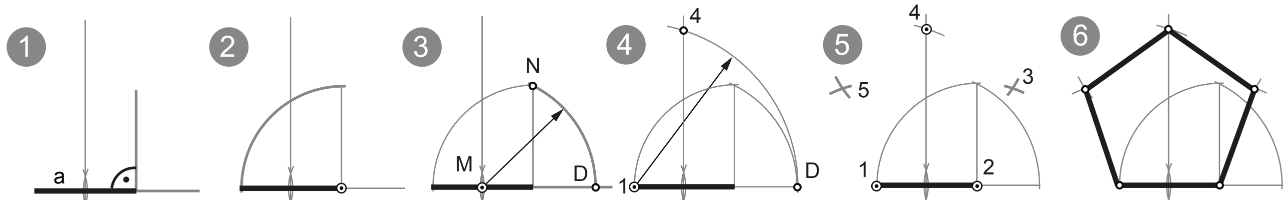
3º- Con radio igual al lado y centro en el vértice 1 trazamos un arco que nos da el vértice 3 sobre la perpendicular trazada.



4º- Con radio igual al lado dado trazamos dos arcos con centros en 3 y 2 obteniendo el 4º vértice.

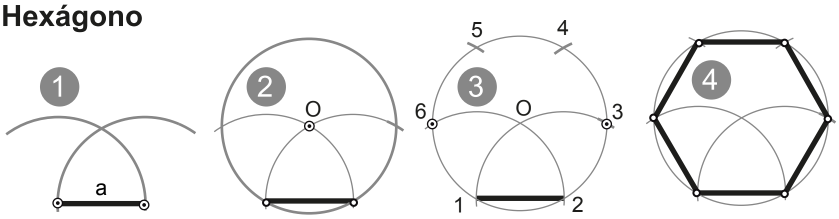
5º- Se unen los vértices 3 y 2 con 4.

Pentágono



1º- Se traza la mediatriz del lado. Por el extremo derecho se levanta una perpendicular y se prolonga el lado.
2º- Con centro en el extremo derecho y radio igual al lado trazamos un arco que corta a la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto medio del lado, M, y radio MN trazamos un arco que corta a la prolongación del lado en D.
4º- Con centro en el vértice 1, con radio 1D trazamos un arco que corta a la mediatriz en el punto 4.
5º- Con radio igual al lado dado trazamos arcos con centros en1, 2 y 4 para obtener los vértices 3 y 5.
6º- Unimos los 5 vértices para obtener el pentágono.

Hexágono



1º- Con radio igual al lado dado se trazan dos arcos para obtener O.

2º- Con centro en O y radio hasta un extremo del lado dado trazamos una circunferencia.

3º Con centros en 3 y 6, con radio igual al lado dado, trazamos dos arcos que cortan a la circunferencia en los puntos 4 y 5.

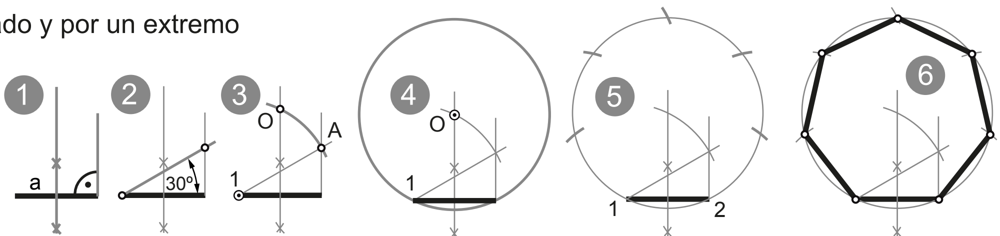
4º Unimos los 6 puntos.

Heptágono

1º- Trazamos la mediatriz del .lado y por un extremo levantamos una perpendicular.

2º- Por el otro extremo trazamos una recta a 30º.

3º- Desde el punto 1 con radio 1A trazamos un arco que corta a la mediatriz en el punto O.



4º- Con centro en O y radio O1 Trazamos la circunferencia que encerrará (circunscribe) al Heptágono.

5º- Tomamos el radio igual al lado dado y desde 1 y 2 trazamos arcos que nos daran los vértices 3,4,5,6 y 7.

6º- Unimos los 7 puntos.

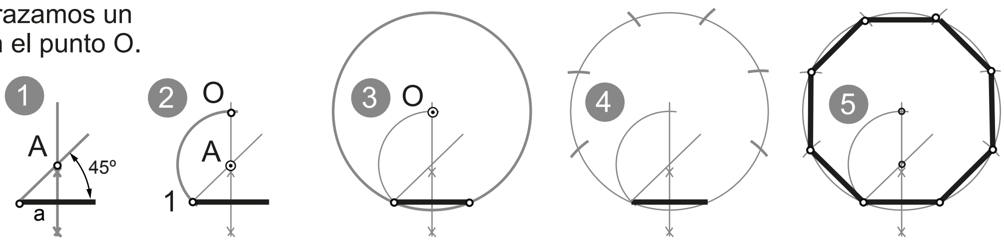
Octógono

1º- Se traza la mediatriz del lado dado y por un extremo trazamos una recta a 45º para obtener A.

2º Con centro en A y radio A1 trazamos un arco que corta a la mediatriz en el punto O.

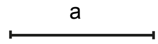
3º Con centro en O y radio O1 trazamos una circunferencia.

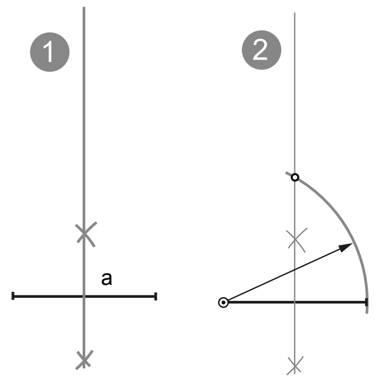
4º Tomando como radio el lado dado trazamos arcos sobre la circunferencia que nos darán los 6 vértices restantes



5º Unimos los 6 puntos con el segmento.

Construcción de un polígono regulares de n (9) lados dado su lado:

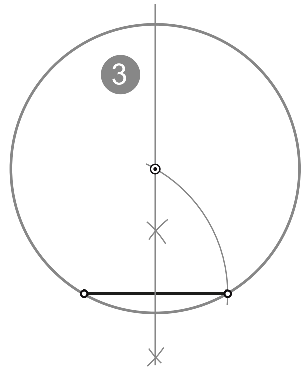




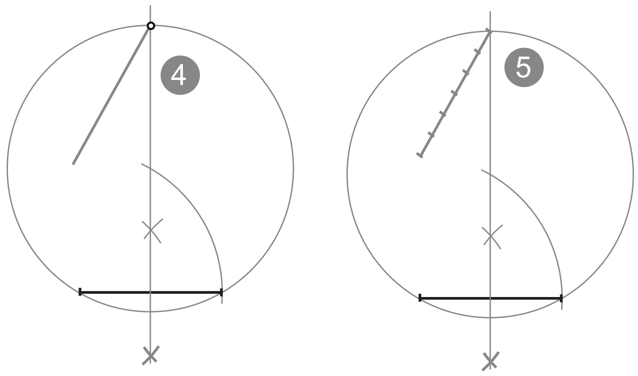
1º- Trazamos la mediatriz del segmento.

2º- Con centro en un extremo del segmento y con radio igual a este trazamos un arco que corta a la mediatriz.

3º- Con centro en el punto de intersección del arco con la mediatriz y con radio hasta uno de los extremos del segmento dado y trazamos una circunferencia que debe pasar por ambos extremos del segmento y cortar a la mediatriz trazada.



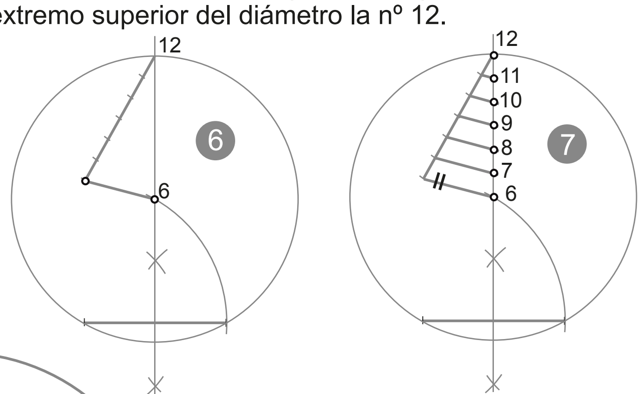
Nos aseguraremos de que la mediatriz corte a la circunferencia por la parte superior. De este modo la mediatriz ahora es un diámetro de la circunferencia. A continuación dividiremos el radio superior de este diámetro en seis partes iguales mediante Thales de Mileto.



4º- Trazamos un segmento auxiliar desde el extremo superior del diámetro de la circunferencia trazada.

5º- Partiendo del extremo del diámetro dividimos el segmento auxiliar en seis partes iguales.

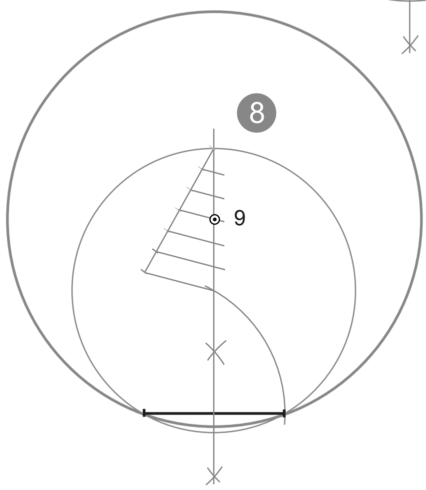
6º- Unimos el último extremo del segmento auxiliar con el centro de la circunferencia que será la particiónº 6, siendo el extremo superior del diámetro la nº 12.



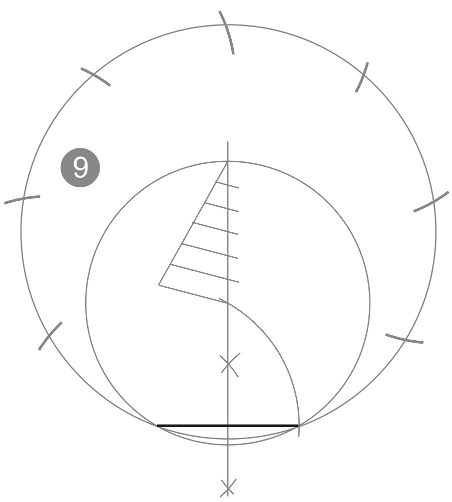
7º- Trazamos paralelas por las marcas hechas sobre el segmento auxiliar obteniendo así las 6 divisiones buscadas.

En este caso buscamos un eneágono. Por ello haremos centro de compás en la división nº 9.

Si buscáramos un polígono de un número distinto de lados haríamos centro en la división del radio de igual número.

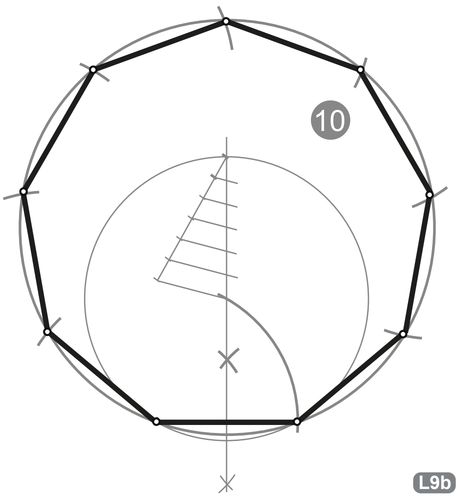


8º- Con centro en la división correspondiente con el número de lados que buscamos y radio hasta uno de los extremos del segmento dado en el enunciado trazamos una circunferencia. La circunferencia debe pasar también por el otro extremo del segmento.



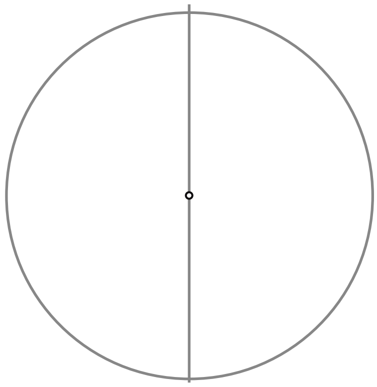
9º- Con ayuda del compás repetimos la medida del segmento dado en el enunciado sobre la circunferencia.

10º- Finalmente podemos trazar el poligono de nueve lados que pide el enunciado.



L9b

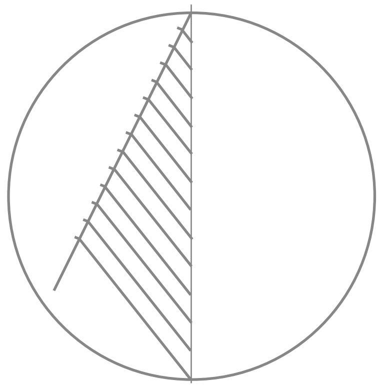
Dado el radio de circunferencia a: construir un polígono regular de n (13) lados:

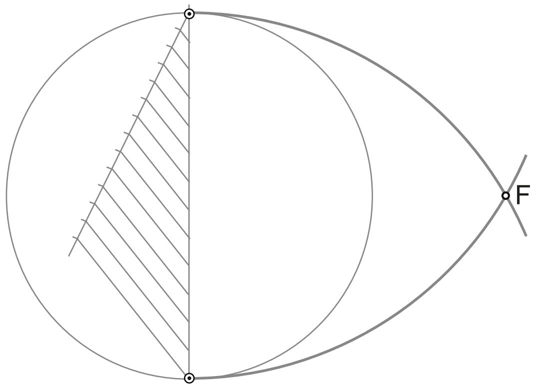


1º- Trazamos a la circunferencia un diámetro vertical.

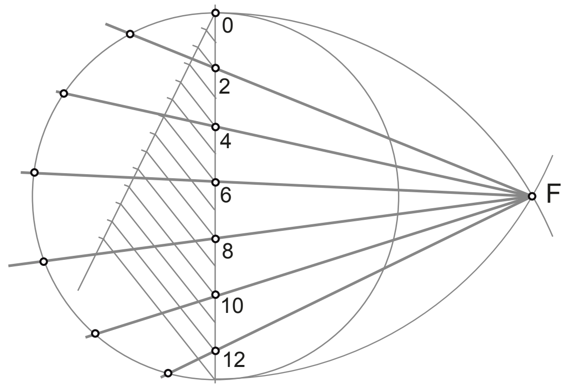
2º- Dividimos el diámetro (Thales de Mileto) en tantas partes como lados queremos que tenga el polígono.

3º- Con radio igual al diámetro de la circunferencia y centros en los extremos de esta trazamos dos arcos que se cortan en un foco, F.

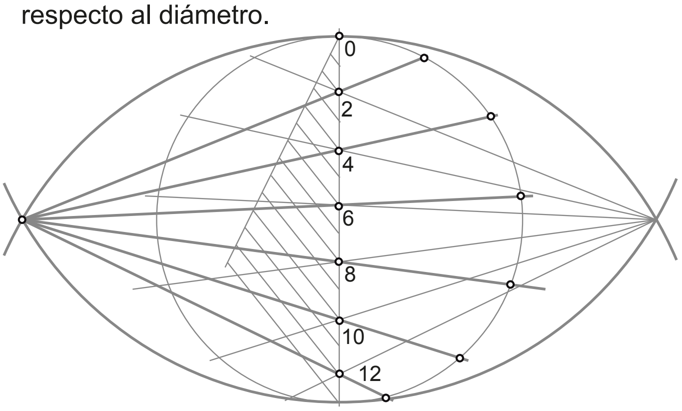


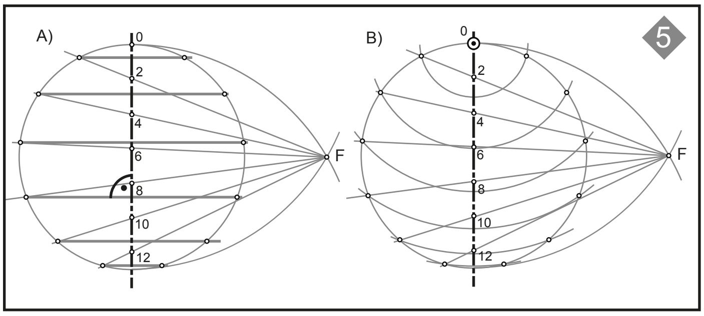


4º- Partiendo del foco **trazamos semirectas que pasen por las divisiones pares**. En los puntos de intersección de salida de las semirectas con la circunferencia obtendremos la mitad de los vértices de la solución. El **punto 0 del diámetro también lo incluimos**, aunque dada su situación no hemos necesitado trazar una recta puesto que este ya se encuentra sobre la circunferencia.

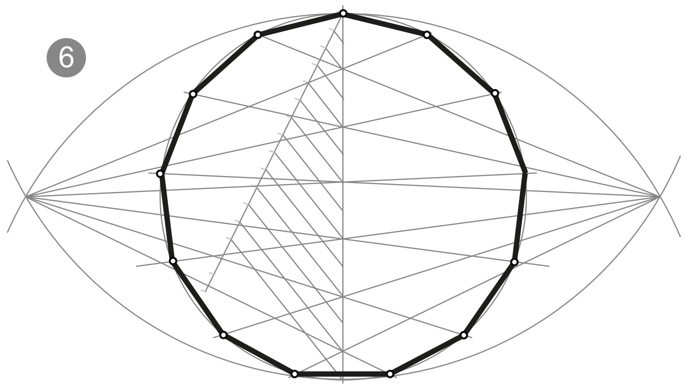


5º- Repetimos la última operación simétricamente respecto al diámetro.





En ocasiones podemos no disponer de todo el espacio gráfico necesario para determinar el segundo foco y reproducir el 5º paso simétricamente. Pero existen otras formas de determinar la otra mitad simétrica de los vértices sobre la circunferencia. A) trazando perpendiculares al diámetro B) con centro en uno de los extremos del diámetro y arcos con radio hasta los puntos obtenidos. (sobre estas líneas a la derecha en el recuadro las dos alternativas).



6º- Unimos todos los puntos obtenidos sobre la circunferencia, recordando contar con el punto 0 del diámetro.

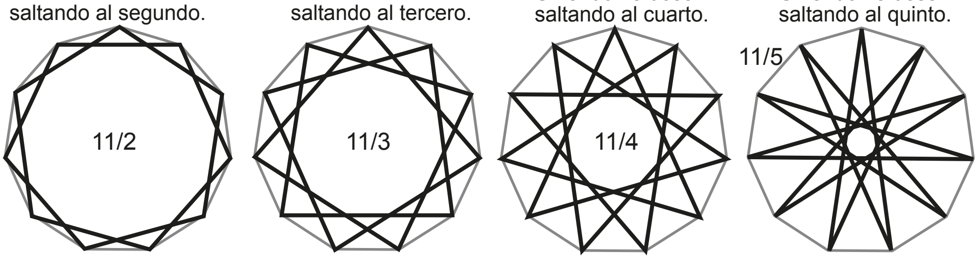
L9a

Los polígonos estrellados se obtienen uniendo de forma constante y no consecutiva los vértices de los polígonos regulares.
Según el número de vértices que tenga el polígono no estrellado podremos obtener ninguno, uno o varios polígonos estrellados:

nº de vértices	nº de estrellas	forma de unir los vértices
5	1	2
6	0	-
7	2	2-3
8	1	3
9	2	2-4
10	2	3-4
11	4	2-3-4-5
12	1	5
13	5	2-3-4-5-6
14	4	3-4-5-6
15	4	2-4-6-7
...	...	...

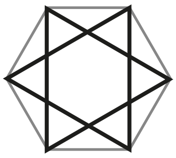
Para ilustrar el cuadro de la izquierda tomamos el ejemplo del eneágono, del cual podemos obtener hasta cuatro estrellas dependiendo del número de vértices que saltemos.

Uniendo vértices saltando al segundo. Uniendo vértices saltando al tercero. Uniendo vértices saltando al cuarto. Uniendo vértices saltando al quinto.

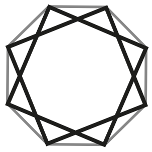


Se definen por N/M siendo N el número de vértices polígono del regular convexo y M el salto entre vértices. N/M ha de ser fracción irreducible, de lo contrario no se genera el polígono estrellado que indica la fracción.

Para saber cuantos polígonos estrellados es posible inscribir en un polígono convexo:
n es el nº de vértices del polígono regular convexo.
Es posible construir tantos polígonos estrellados como números enteros hay, menores que su mitad (n/2) y primos con n.
Ejemplo: Eptágono (7 lados), su mitad es 3,5 y los números enteros menores de 3,5 primos son el 2 y el 3.
Entonces, para obtener un Eptágono estrellado podemos unir los vértices de dos formas: saltando 2 y saltando 3 vértices.



La estrella de David.



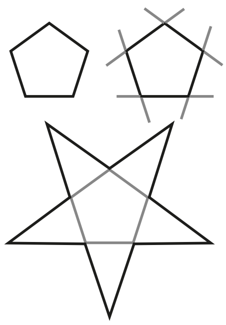
Falso Octógono estrellado.

FALSAS ESTRELLAS

En algunos casos al unir los vértices de forma alterna podemos encontrarnos con que en realidad inscribimos otros polígonos convexos dentro del polígono inicial. En esos casos no obtendremos polígonos estrellados propiamente dichos sino **falsas estrellas**.

ESTRELLAR POLÍGONOS

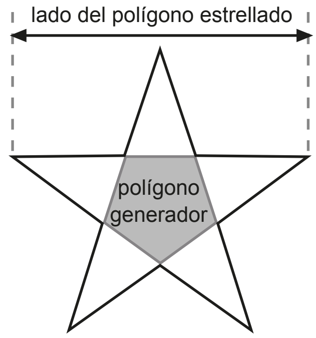
Estrellar un polígono consiste en prolongar sus lados para que se corten nuevamente entre sí, así se obtiene un nuevo polígono con forma de estrella.



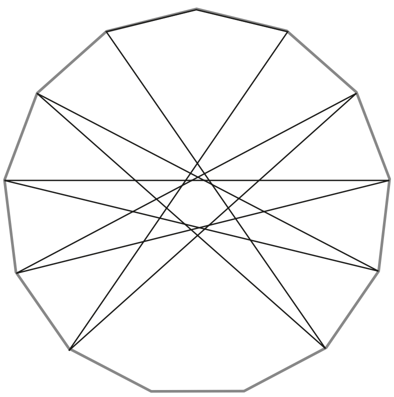
A la izquierda podemos ver el proceso de estrellar un pentágono.

Para este polígono solo podemos estrellarlo una vez, pues el pentágono únicamente genera un polígono estrellado.

Al pentágono estrellado también se le llama generalmente PENTAGRAMA o pentáculo y es una figura muy significativa simbólicamente, sobre todo por contener la proporción divina oculta en sus medidas

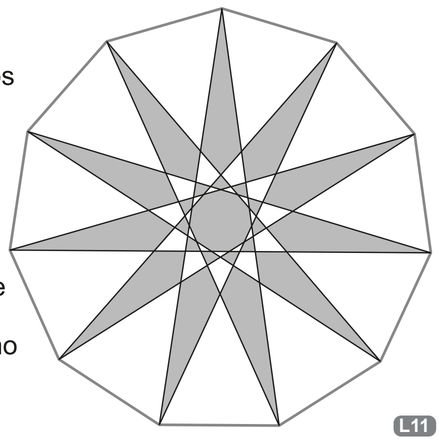


Estrellar un polígono consiste en prolongar sus lados para que se corten nuevamente entre sí, así se obtiene un nuevo polígono con forma de estrella.



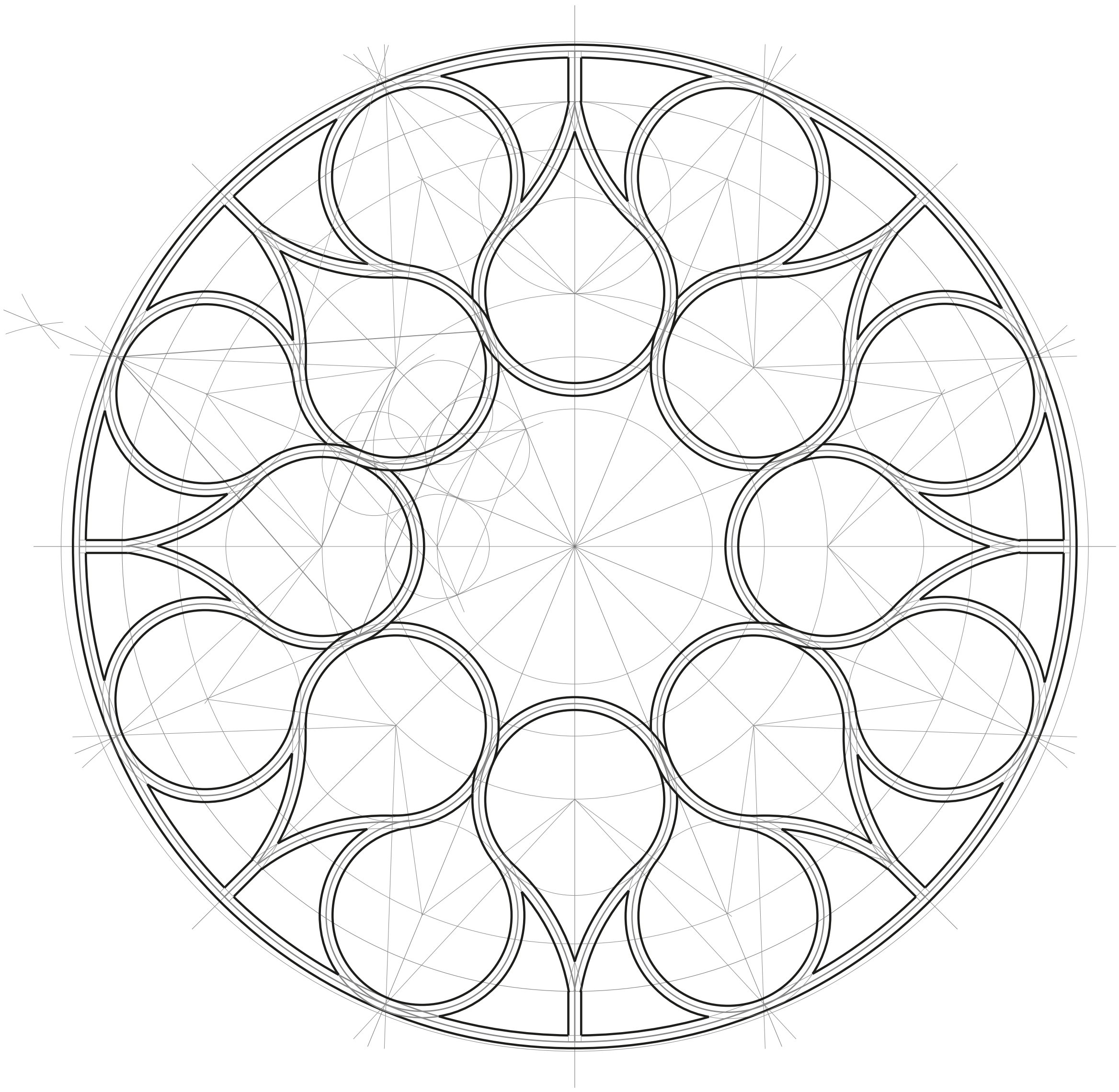
Si estrellamos un polígono convexo observamos que la primera estrella que se genera es la que se produce al saltar el menor número de vértices. Si continuamos estrellándola conseguiremos la segunda estrella.

Y así sucesivamente podremos dibujar, unas dentro de otras, todas las estrellas posibles que dicho polígono nos ofrece. Lo mismo ocurre si inscribimos la estrella empezando por el máximo salto de vértices (procedimiento inverso).



L11

3- TANGENCIAS Y CURVAS



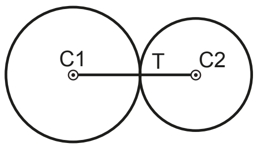
Tangencias y Enlaces

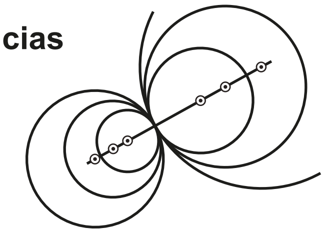
Dos elementos son **tangentes** cuando tienen un punto en común denominado punto de tangencia. Estos elementos son circunferencias, arcos de circunferencia, rectas y en algunos casos también curvas conicas.

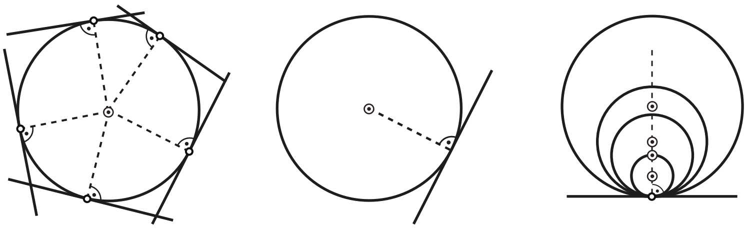
Un **enlace** es la unión armónica de curvas con curvas o curvas con rectas. Los enlaces son la aplicación práctica de las tangencias.

Propiedades fundamentales de las tangencias

1- Los centros de dos circunferencias tangentes entre sí están alineados con el punto de tangencia.

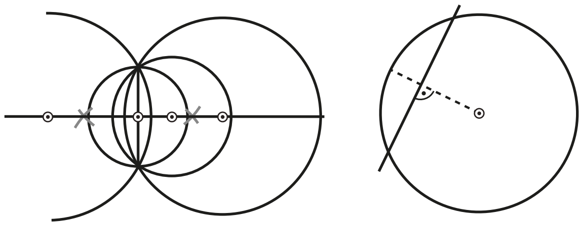


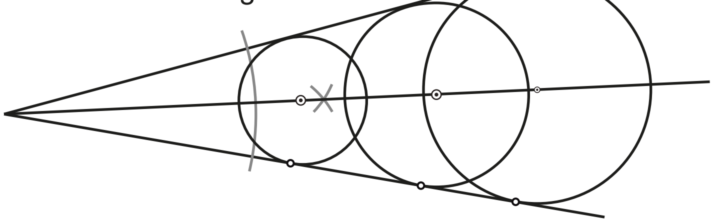




2- Una recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

3- El centro de cualquier circunferencia que pasa por dos puntos se encuentra en la mediatriz del segmento que definen los dos puntos.Todo radio perpendicular a una cuerda de circunferencia divide a esta en dos mitades iguales.

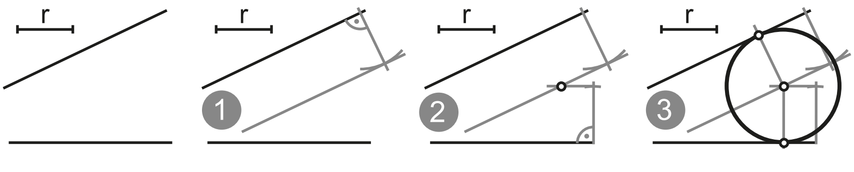




4- El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que estas producen.

EJERCICIOS TANGENCIAS DADOS DOS ELEMENTOS (rectas o circunferencias) y el radio de la circunferencia solución.

Dadas dos rectas, trazar la circunferencia de radio r tangente a ambas.

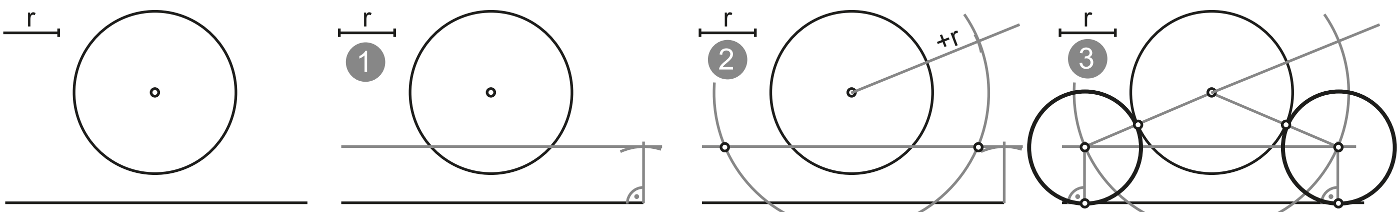


1º- Trazamos una paralela a una distancia r de una recta.

2º- Hacemos lo mismo con la otra recta. Donde las paralelas se cortan es el centro de la solución.

3º- Desde el centro trazamos perpendiculares a las rectas del enunciado para hallar los ptos. de tg. Trazamos la cir.

Dada una recta y una circunferencia, trazar la circunferencia de radio dado r (menor al radio de la dada) tangente a ambas.



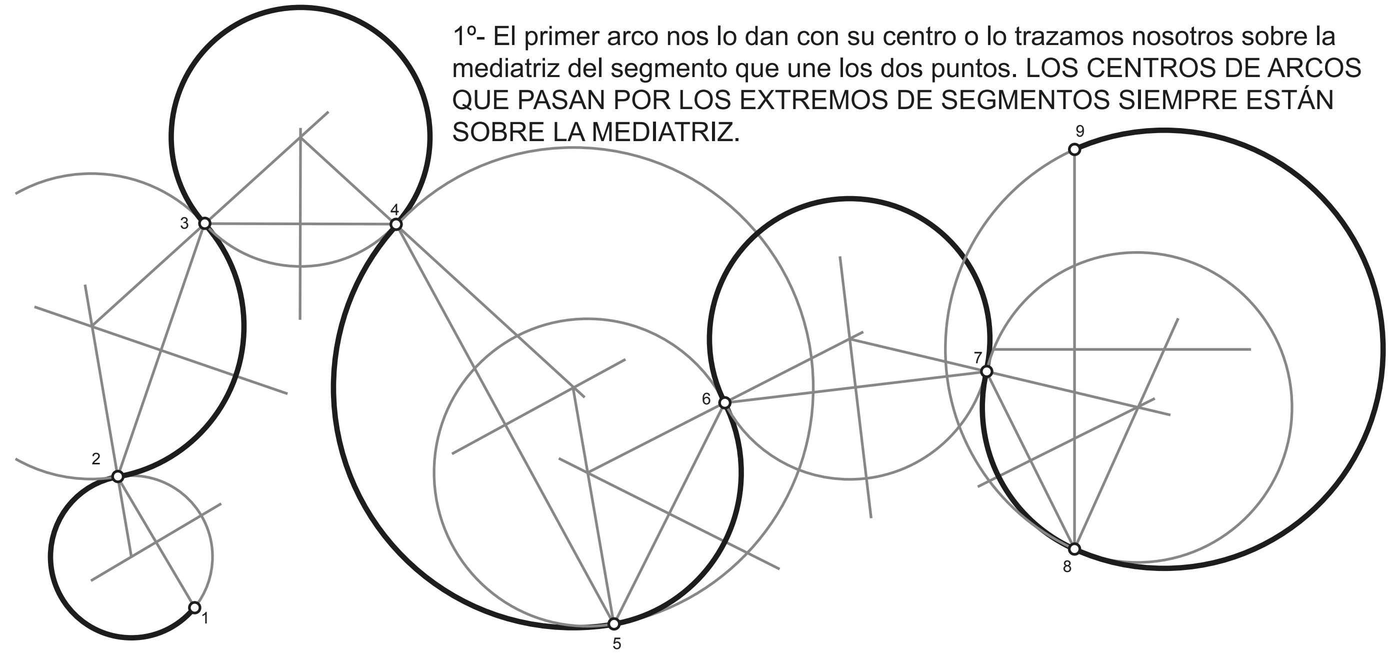
1º- Trazamos una paralela a una distancia r de la recta.

2º- Trazamos un arco concéntrico a la dada de radio (+r). Conseguimos esto trazando un radio arbitrario y a partir del punto de corte con la circunferencia transportar la medida (r). Los puntos de intersección con la recta paralela serán los centros de las circunferencias soluciones. (coincidencia de sos lugares geométricos)

3º- Hallamos los puntos de tangencia: a partir de los centros perpendiculares a las rectas y segmentos con el otro extremo en la circunferencia de la dada. Trazamos las circunferencias que solucionan el problema.

ENLACES DE PUNTOS MEDIANTE ARCOS DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES

1º- El primer arco nos lo dan con su centro o lo trazamos nosotros sobre la mediatriz del segmento que une los dos puntos. LOS CENTROS DE ARCOS QUE PASAN POR LOS EXTREMOS DE SEGMENTOS SIEMPRE ESTÁN SOBRE LA MEDIATRIZ.



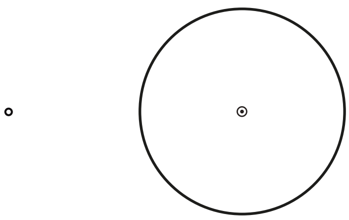
2º- Podemos unir los puntos con segmentos a medida hacemos los arcos o unirlos todos al principio.

3º- A cada segmento le trazaremos su mediatriz. Uniremos el último punto de cada arco con su centro y en la prolongación de esa recta, SOBRE LA MEDIATRIZ, encontraremos el siguiente arco.

4º- Procederemos del mismo modo hasta acabar los puntos.

RECTAS TANGENTES CIRCUNFERENCIA PUNTO

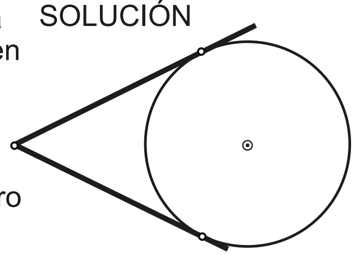
ENUNCIADO



En el enunciado se presenta una circunferencia con su centro y un punto exterior a ella. Se piden las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto exterior

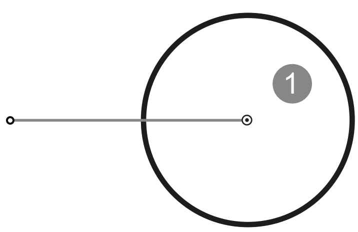
Para resolverlo necesitamos trazar ciertos trazados auxiliares que se pueden explicar cuatro pasos

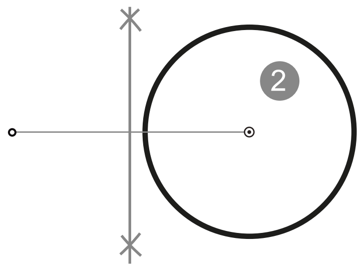
SOLUCIÓN



1º- Unimos el centro de la circunferencia con el punto exterior a ella trazando un segmento.

2º-Trazamos la mediatriz del semento obteniendo el punto medio de este.

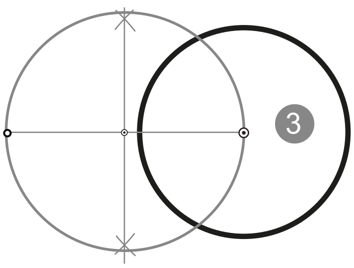


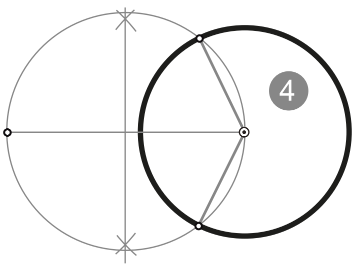


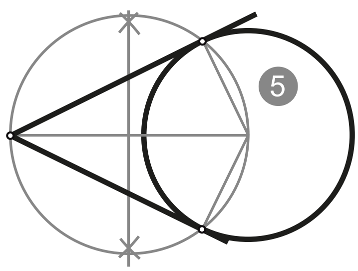
3º- Con centro en el punto medio y radio hasta el punto exterior o el centro (lo cual es lo mismo), trazamos una circunferencia que corta a la dada en dos puntos, los puntos de tangencia.

4º Trazamos radios hasta los puntos de tangencia

5º Desde el punto exterior hasta los puntos de tangencia trazamos las rectas que son solución

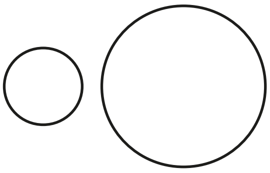




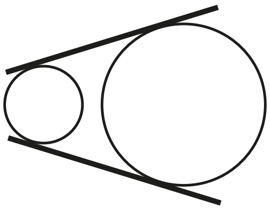


Tangentes exteriores e interiores a dos circunferencias

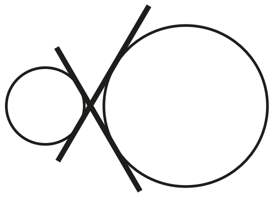
ENUNCIADO



SOLUCIÓN tangentes exteriores



SOLUCIÓN tangentes interiores



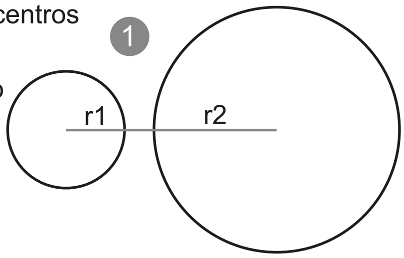
Para resolver estos dos problemas necesitamos reducirlos al problema pto-circunferencia. Tendremos que hacer el esfuerzo de "olvidarnos" (ignorar visualmente) el enunciado original y resolver el problema pto-circunferencia. Una vez conseguido el resultado del problema original no trae mas dificultad que llevar las rectas y los radios a su sitio trazando paralelas con escuadra y cartabón

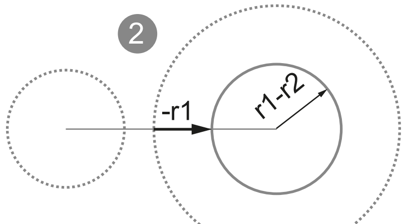
Tangentes exteriores a dos circunferencias

1º Trazamos el segmento que une los dos centros

2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le restamos el radio de la circunferencia pequeña.

De este modo hemos reducido el problema a rectas tangentes punto-circunferencia

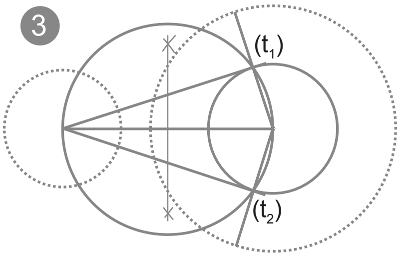


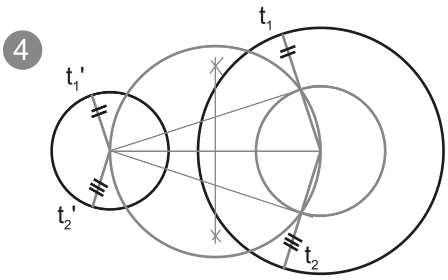


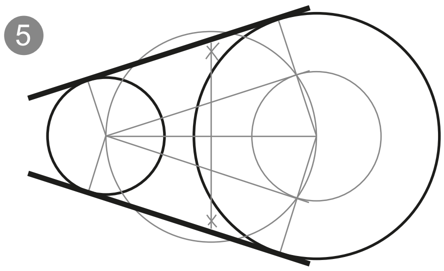
3º- Resolvemos el problema reducido, trazamos los radios que van a (t1) y (t2) lo suficientemente largos para que corten a la circunferencia grande original.

4º- A partir del centro de la circunferencia pequeña original trazamos radios con la misma inclinación (escuadra y cartabón). Así,con los cuatro radios trazados obtenemos t1 yt2 sobre la grande y t1' yt2' sobre la pequeña

5º- Unimos t1 con t1' y t2 con t2'





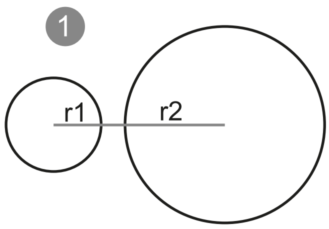


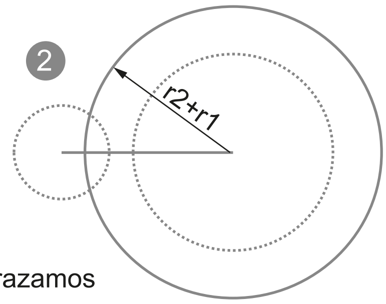
Tangentes interiores a dos circunferencias

1º Trazamos el segmento que une los dos centros

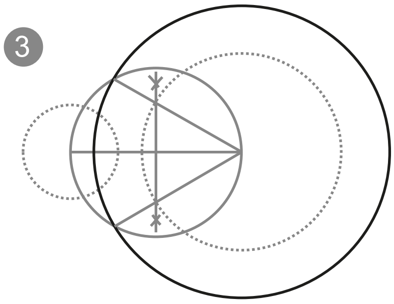
2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le sumamos el radio de la circunferencia pequeña.

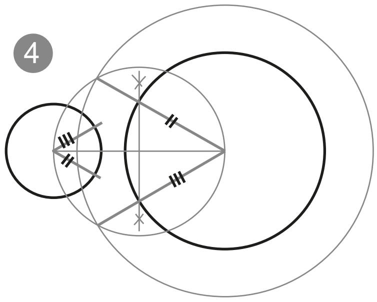
De este modo hemos reducido el problema a rectas tangentes punto-circunferencia.

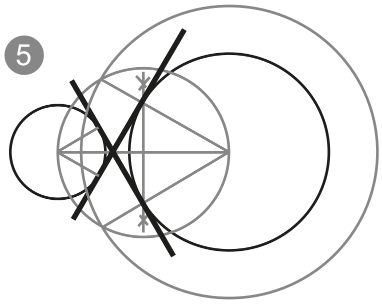




3º- Resolvemos el problema reducido,obteniendo así (t1) y (t2), pero esta vez no trazamos las rectas tangentes para no contaminar con demasiadas líneas el dibujo.





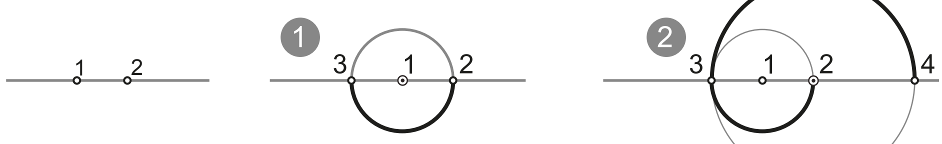


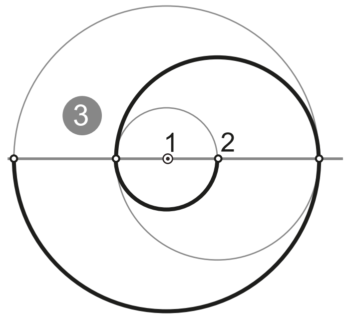
4º- Trazamos radios paralelos a los de la circunferencia grande en la circunferencia pequeña, pero invirtiendo su posición (el radio de arriba en la grande, abajo en la pequeña y viceversa). Los puntos de tangencia del problema original se encuentran en las intersecciones de los radios.

5º- Unimos t1' con t1 y t2' con t2.

Una espiral es una curva abierta y plana que da vueltas alrededor de un punto alejándose de él. El paso de la espiral es la distancia entre dos vueltas o espiras consecutivas.
A las **espirales** también se les denomina **volutas**, aunque a una voluta también se las denomina como **espiral poligonal**. Una espiral poligonal es una curva formada por arcos tangentes interiores entre sí con centros en los vétices de un polígono.

Trazado de una espiral de dos centros: L5a





Sobre una recta situamos los dos centros a la distancia deseada.

1º- Con centro en 1 y radio 1-2 trazamos una semicircunferencia que nos da el punto 3.

2º- Con centro en 2 y radio 2-3 trazamos una semicircunferencia, en el lado opuesto a la primera. Obtenemos el punto 4.

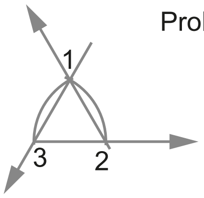
3º- Con centro en 1 de nuevo, trazamos una semicircunferencia de radio 1-4, obteniendo el punto 5.

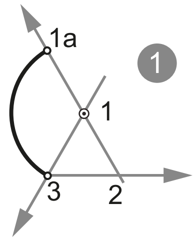
Se trata de alternar los centros uno y dos, trazando semicircunferencias concéntricas, siempre en el mismo lado para cada centro y abriendo el compás el radio máximo posible en cada paso.

Trazado de una espiral de tres centros situados en los vertices de un triángulo equilatero: L5b

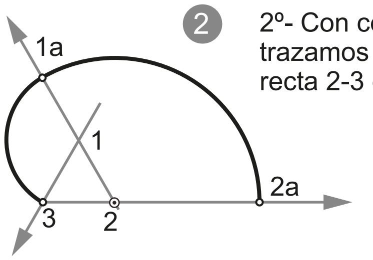
Trazamos un triángulo equilátero (el paso de la espiral es la magnitud del lado del triángulo)

Prolongamos cada lado por uno de sus extremos.

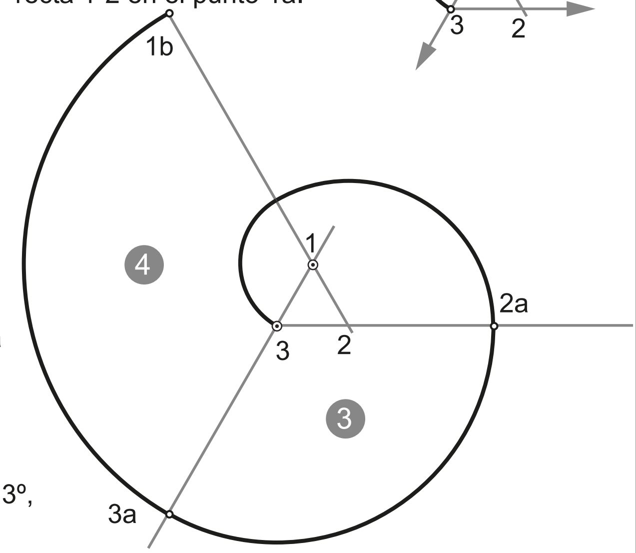




1º- Con centro en 1 y radio 1-3 trazamos un arco que corta a la recta 1-2 en el punto 1a.



2º- Con centro en 2 y radio 2-1a trazamos un arco que corta a la recta 2-3 en el punto 2a.

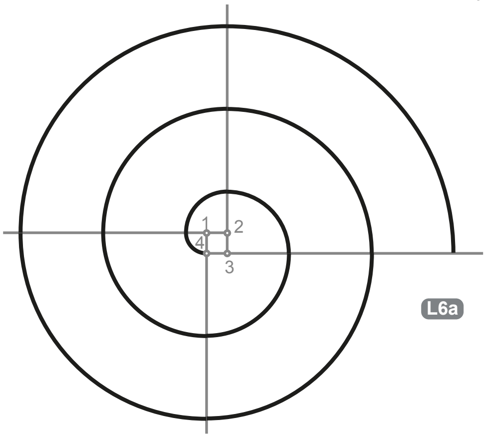


3º- Con centro en 3 y radio 3-2a trazamos un arco que corta a la recta 1-3 en el punto 3a.

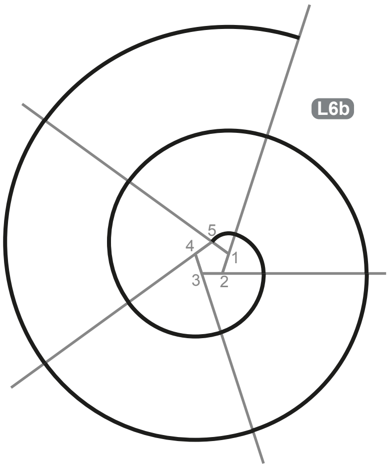
4º- Con centro en 1 de nuevo y radio 1-3a trazamos el arco que sobre la recta 1-2 nos da el punto 1b.

A partir de ahí trazaremos los arcos siguiendo los pasos 1º, 2º y 3º, pero con radios hasta los puntos xb, xc, xd...

Observar, en ambas espirales, como cada sector de arcos siempre tiene el mismo centro, es decir, para formar la espiral trazamos arcos concéntricos. El diametro o rádio de cada arco va incrementándose sucesivamente en función del paso y del nº de centros.



Demás espirales poligonales todas se trazan siguiendo el mismo procecimiento que la espiral de tres centros. En est página se muestran dos espirales de cuatro y de cinco centros pero se puede seguir aumentando el número de vértices.



El **óvalo** es una curva cerrada y plana que está compuesta por cuatro, o más, arcos de circunferéncia simétricos entre sí. Suele venir definido por dos ejes que marcan sus dimensiones y sirven de ejes de simetría de los arcos. Se emplea frecuentemente en perspectivas axonométricas para representar la circunferencia vista en perspectiva.

El **ovoide** es un caso particular de óvalo, se define por dos ejes perpendiculares entre sí: el mayor que actua de eje de simetría y el menor menor, perpendicular al primero.

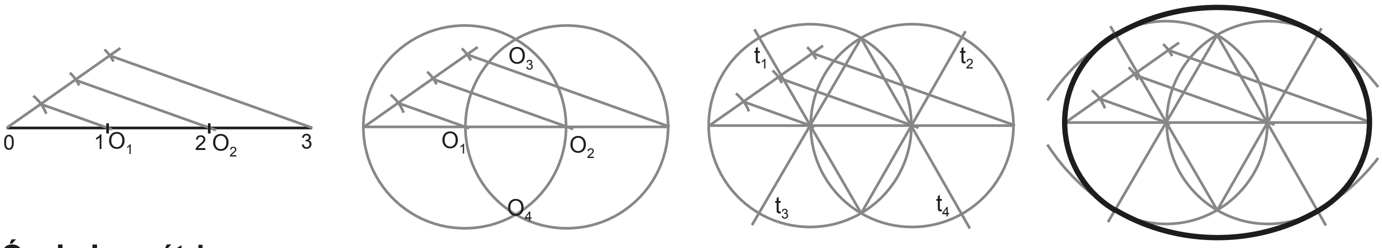
Óvalo dado el eje mayor (metodo 1)

1º- Dividimos el eje mayor dado en tres partes iguales. Los dos puntos que lo dividen serán dos de los centros

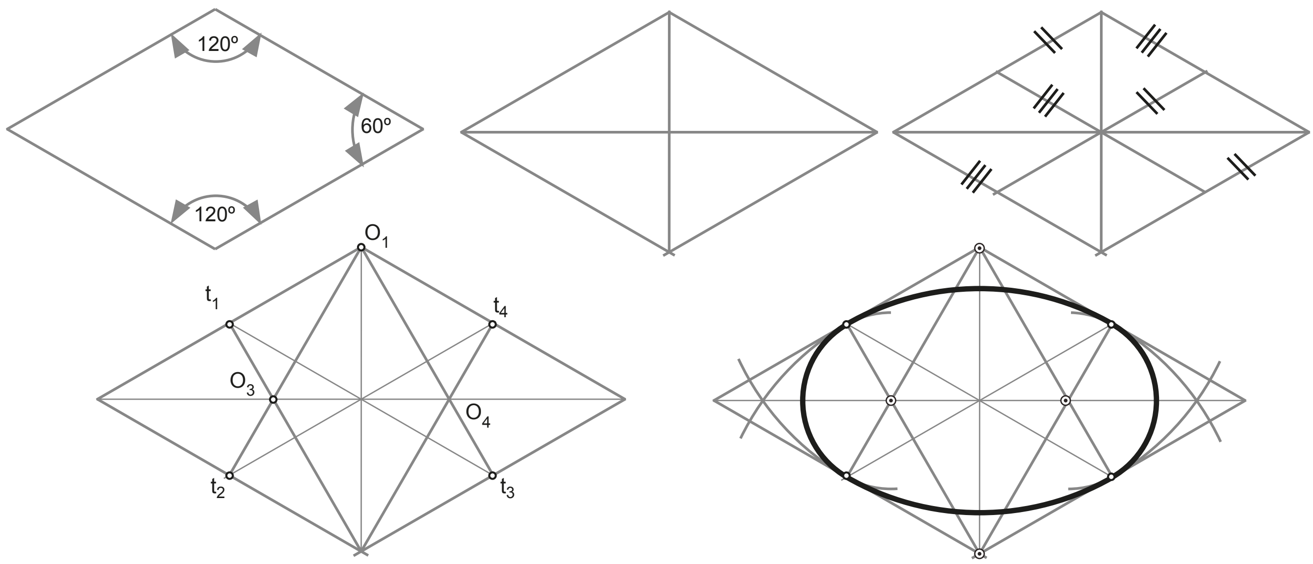
2º- Trazamos dos circunferencias desde O_1 y O_2 y radio hasta los extremos del eje, los dos puntos de intersección serán los otros dos centros del óvalo.

3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2, los puntos en que las rectas cortan las dos circunferencias trazadas serán los puntos de tangencia.

4º- Desde O3 y O4 trazamos los arcos que completan el óvalo.



Óvalo Isométrico



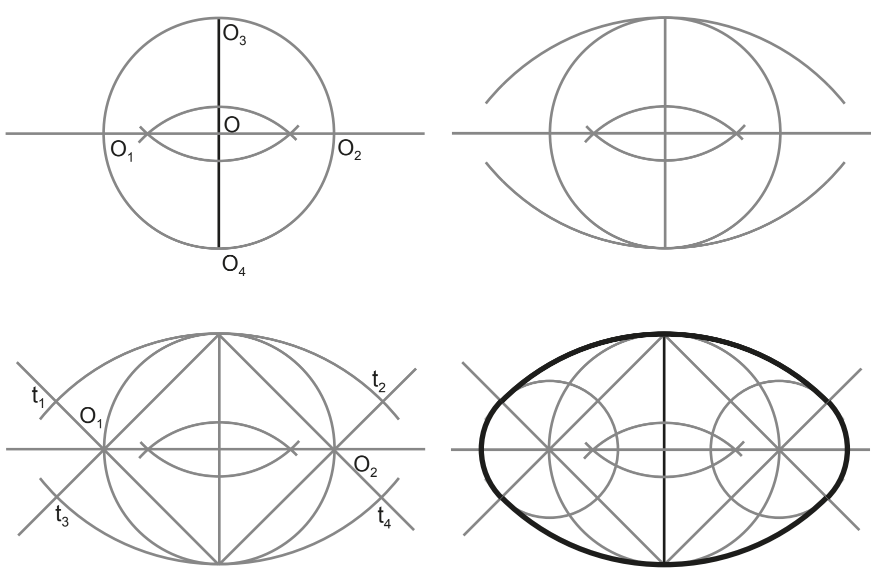
Óvalo dado el eje menor

1º- Colocando el eje dado en posición vertical, trazamos su mediatriz y desde su punto medio (O) trazamos una circunferencia con diámetro igual al eje dado, obteniendo así los cuatro centros del óvalo.

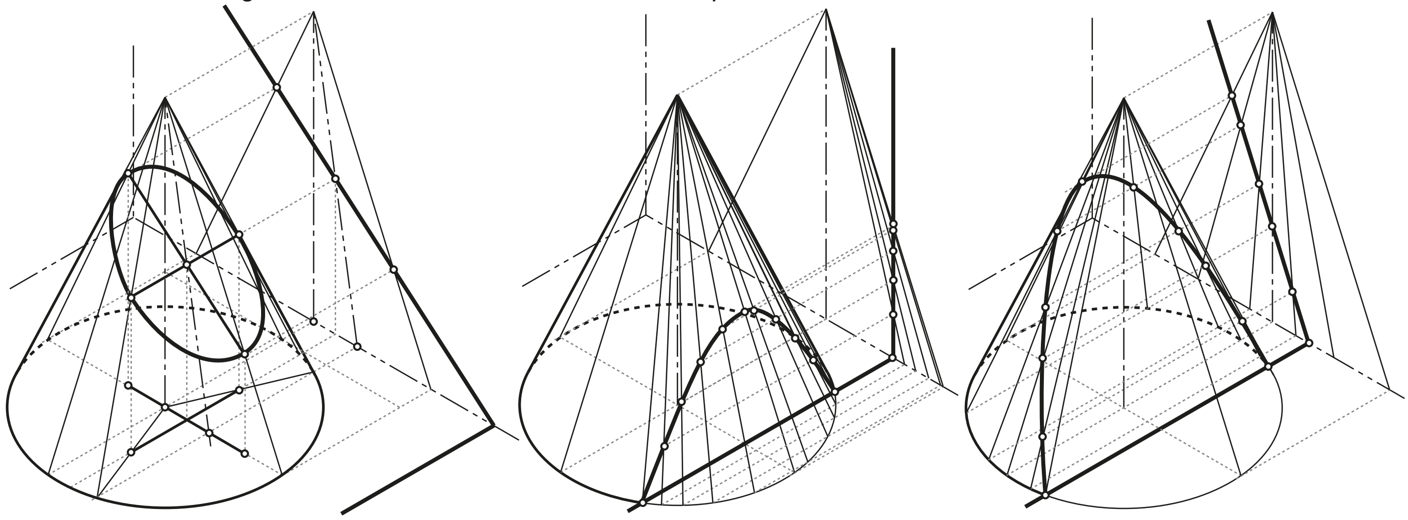
2º- Desde los extremos del eje menor trazamos dos arcos de radio igual a la totalidad del mismo.

3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2 obteniendo sobre ambos arcos los puntos de tangencia.

4º- Con centro en O1 y O2 trazamos los arcos necesarios para completar el óvalo abriendo el compás hasta los puntos de tangencia.

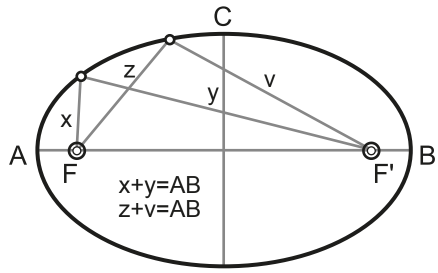


Si seccionamos el cono con un plano paralelo a dos de sus generatrices obtenemos una hipérbola.Si lo seccionamos por un plano paralelo a una y solo una arista la sección es una parábola. Y si seccionamos el cono por un plano oblicuo a todas las generatrices del cono se obtiene una elipse.



LA ELIPSE:

"la elipse es el conjunto de puntos cuya suma de radio vectores (distancias desde la elpise a los dos focos) es constante e igual al eje mayor".



Elementos paramétricos: son las tres magnitudes que caracterizan la elipse.

1. **Eje mayor** AB: Es eje de simetría.
2. **Eje menor** CD: También es eje de simetría

Ambos ejes son perpendiculares entre sí cortándose en sus puntos medios.

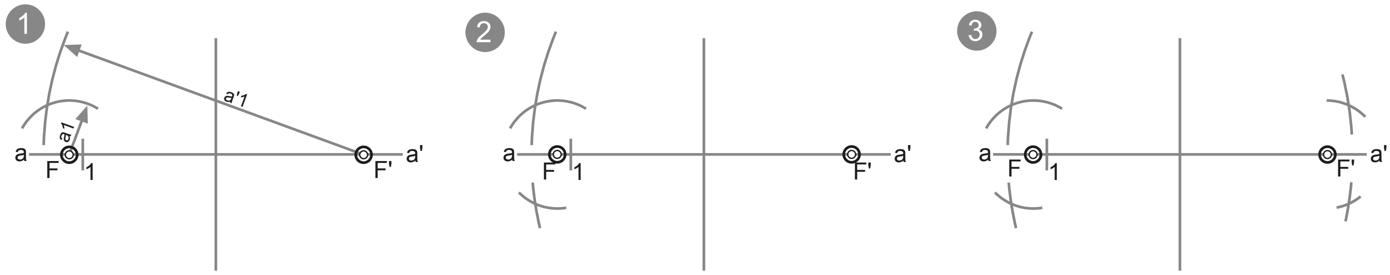
3. **Focos F, F'**: Puntos fijos sobre el eje mayor, de referencia de distancias

Trazado de la elipse por puntos

1º- Marcamos un punto arbitrario (1) sobre el eje mayor. Con centro en F y radio a1 trazamos un arco en el primer cuadrante de la elipse y con centro en F' y radio a'1 trazamos otro arco tambien en el primer cuadrante. El punto dónde se cortan ambos arcos pertenece a la elipse ya que se cumple a1+a'1=aa'

2º- Con los mismos radios y los mismos centros podemos obtener el punto simetríco en el tercer cuadrante.

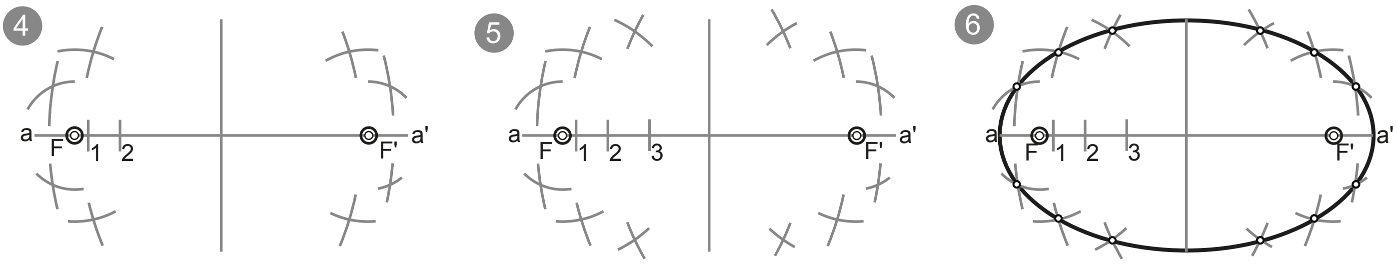
3º- Con los mismos radios pero invirtiendo los centros, hallamos los puntos simétricos respecto a eje menor a los otros dos.



4º- Marcamos otro punto (2) sobre el eje mayor y repetimos la operación de los pasos 2º y 3º, así obtenemos otros cuatro puntos de la elipse

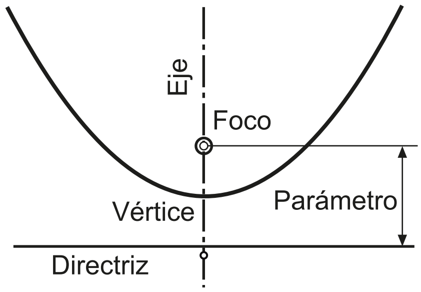
5º- Marcamos un tercer punto y repetimos de nuevo la operación de los pasos 2º y 3º. Con 12 puntos podemos intuir el recorrido de la elipse, aunque podemos repetir la operación para conseguir más puntos.

6º- Unimos los puntos a mano alzada.



LA PARÁBOLA:

"La parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz.



Elementos paramétricos:

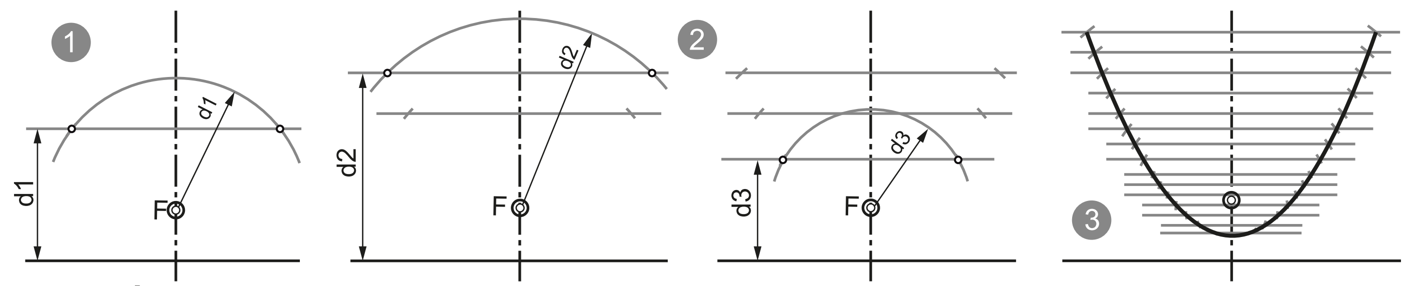
1. **Foco** F
2. **Directriz** d: Perpendicular al eje de simetría.
3. **Vértice** A: Vértice extremo del eje, y por tanto de la curva. Se encuentra en el punto medio entre el foco y la diectriz.

Trazado de la parábola dado el foco y la directriz:

1º- Trazamos una paralela a la directriz a una distancia d. Con centro en F trazamos un arco de radio d que corta a la paralela en dos puntos pertenecientes a la parábola.

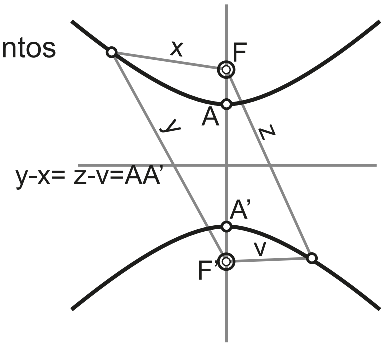
2º- Repetimos este procedimiento tantas veces como pares de puntos simétricos deseemos obtener.

3º- Por último unimos los puntos obtenidos para obtener la parábola.



LA HIPÉRBOLA:

"La hipérbola es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la distancia entre los vértices".



Elementos paramétricos:
son las tres magnitudes que caracterizan la hipérbola.
1. Eje real AA': o principal.
2. Eje imaginario CD: o secundario.

Ambos son perpendiculares entre sí.

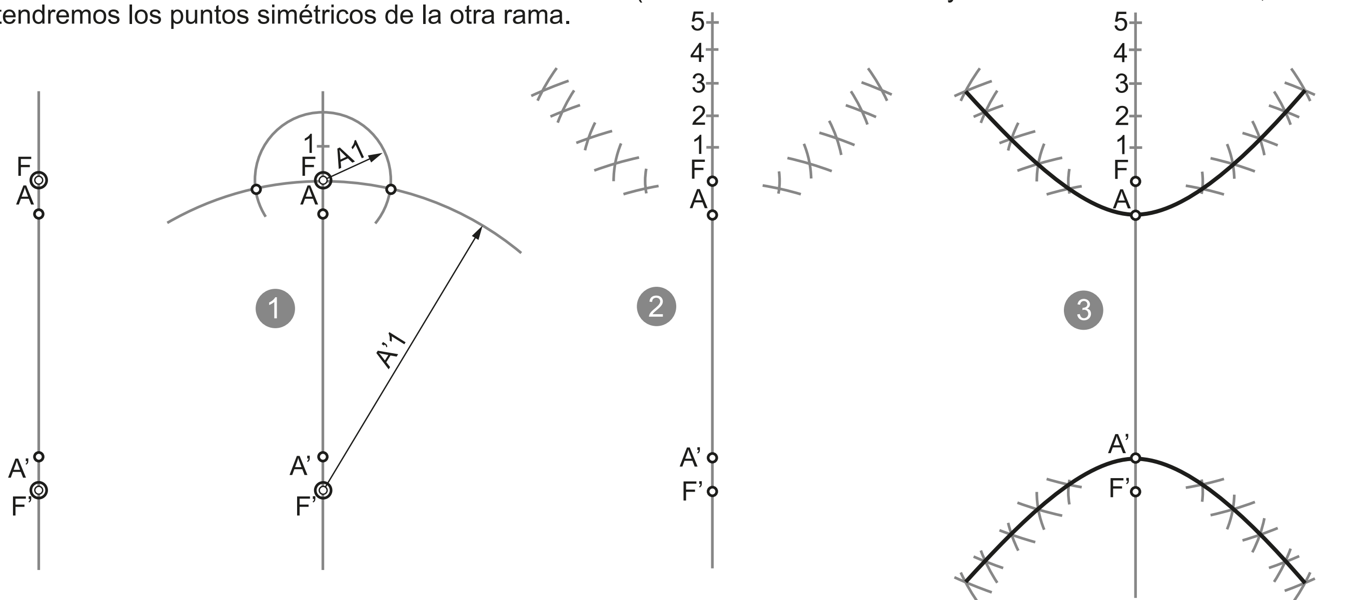
3. Focos: puntos fijos sobre el eje AA', de referencia de distancias.

Trazado de la hipérbola dados los focos F y F' y Los vértices A y A':

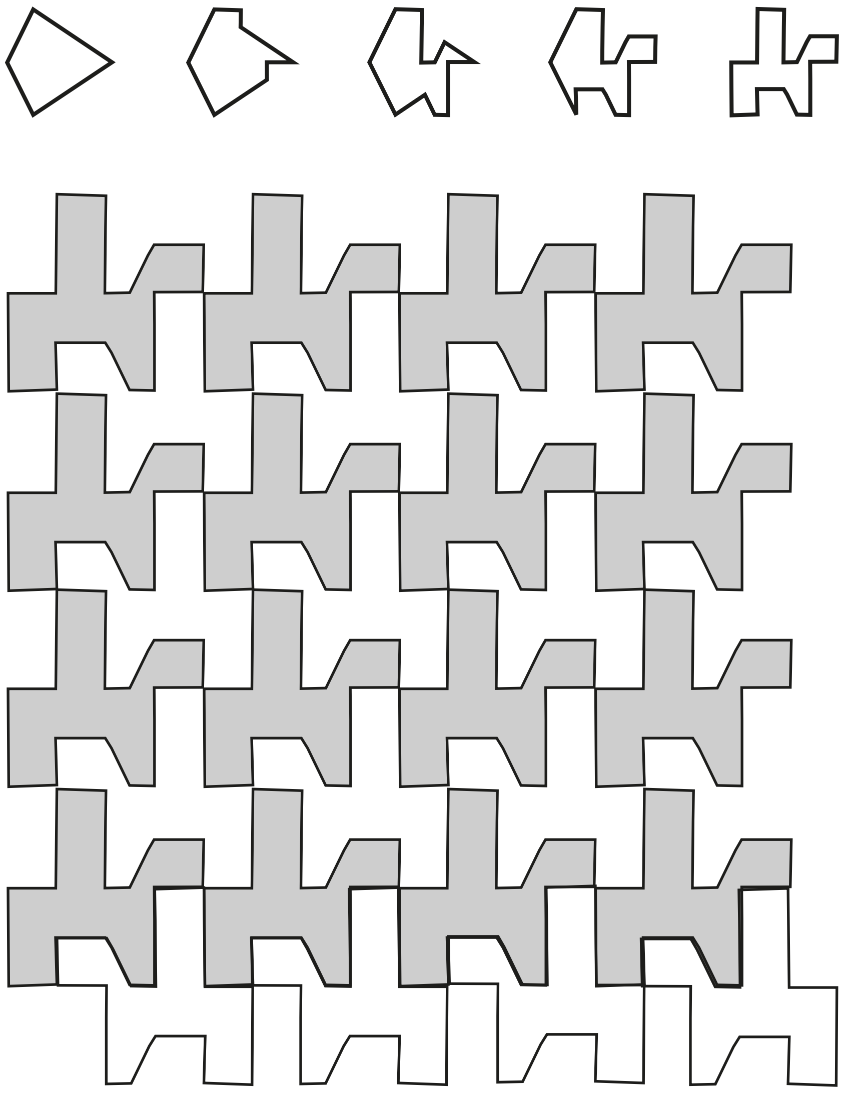
1º- Tomamos un punto sobre el eje FF'. Con centro en F y radio A1 trazamos un arco y con centro en F' y radio A'1 trazamos otro arco, los dos puntos de intersección de los arcos son puntos de la hipérbola.

2º- Repetimos este procedimiento tantas veces como pares de puntos simétricos deseemos obtener.

3º- Si tomando los mismos radios invertimos los centros (radio A1 con centro en F' y radio A'1 con centro en F, etc. obtendremos los puntos simétricos de la otra rama.



4-MOVIMIENTOS EN EL PLANO



SIMETRÍA

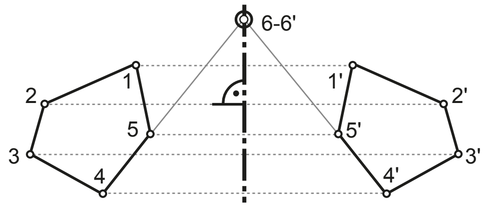
L1

La simetría se estudia o se emplea para el estudio en campos tan variados como la física, las matemáticas el arte o la arquitectura.

Como transformación geométrica en el plano la **simetría** es una transformación en la que todo punto y su simétrico se encuentran a distinto lado de un centro o un eje y a igual distancia de este. Existen dos tipos de simetría dependiendo de si se emplea un eje o un centro.

SIMETRÍA AXIAL (eje)

Los puntos simétricos se encuentran sobre una perpendicular al eje de simetría, a igual distancia y en distintos lados del eje.

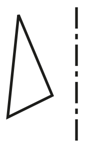


Los pares de rectas simétricos (axiales) tienen su intersección sobre el eje de simetría. Cuando el eje de simetría corta una recta, la recta simétrica cortará a la primera sobre el eje de simetría y el punto de intersección será un **punto doble**.

Cualquier punto que se encuentre sobre el eje de simetría tiene su simétrico en el mismo punto, a estos les llamamos puntos dobles.

A la izquierda: el punto 6-6’ es un punto doble en esa simetría

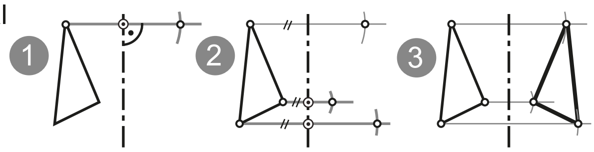
Trazar el triángulo simétrico respecto a un eje.



1º- A patrir de un vértice trazamos una perpendicular al eje. En el punto de intersección hacemos centro de compás y trasladamos la distancia del eje al punto al otro lado para obtener el punto simétrico del vértice.

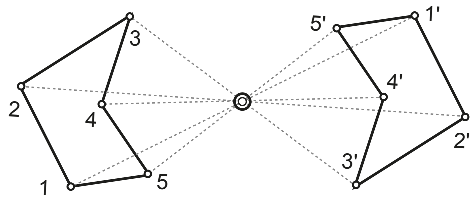
2º- Repetimos la operación con los demás vértices.

3º- Unimos los vértices simétricos.



SIMETRÍA CENTRAL O RADIAL (centro-punto)

Los puntos simétricos se encuentran alineados con el centro, a igual distancia y en distinto lado.

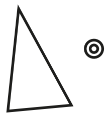


La rectas o segmentos simétricos respecto a un centro son paralelas.

La simetría central equivale a un giro de 180º con el mismo centro, o es el producto de dos simetrías axiales cuyos ejes se cortan perpendicularmente en el centro de simetría. Es probablemente por esa razón por lo que esta transformación no es tenida en cuenta como un movimiento en el plano para clasificar los grupos de simetría en el plano.

Sin embargo esta transformación se emplea mucho en diseño, arte y arquitectura.

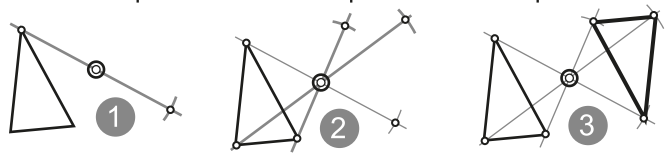
Trazar el triángulo simétrico respecto a un centro.



1º- A patrir de un vértice trazamos una recta que pase por el centro de simetría. En el centro hacemos centro de compás y trasladamos la distancia del centro al punto al otro lado para obtener el punto simétrico del vértice.

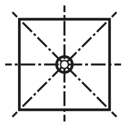
2º- Repetimos la operación con los demás vértices.

3º- Unimos los vértices simétricos

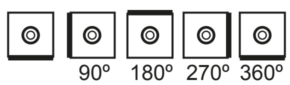


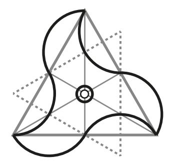
SIMETRÍA DE GIRO

También llamada simetría rotacional, no es una transformación en el plano sino la característica de un objeto geométrico. Una figura geométrica tiene simetría de giro si se puede hacer que coincida exactamente en la original al girarla menos de un ciclo completo (360º) con respecto a un centro de giro.



El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría y es una figura cuyos vértices responden a una simetría radial o central. Sin embargo esas simetrías no son lo mismo que la simetría de giro del cuadrado o su orden de simetría. Si marcamos uno de sus lados y situamos el centro de giro en el centro geométrico del cuadrado, podemos ejercer 4 giros de 90º de modo que en cada uno de los giros el cuadrado permanece invariable y en el cuarto giro el cuadrado habrá llegado a su posición inicial.



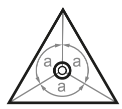


Por ello podemos decir que el cuadrado tiene una simetría de giro de orden 4.

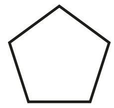
La pararita nazarí es una figura geométrica, derivada del triángulo equilátero, compuesta por 6 arcos de circunferencia, resenta cierta regularidad en su estructura. La pajarita nazarí no contiene ninguna simetría axial ni simetría radial, sin embargo tiene una simetría de giro de orden 3; pues puede ser girada 3 veces 120 grados y en cada uno de esos giros la figura permanecerá idéntica.

Se llama ORDEN de SIMETRÍA (n) al número de veces que hay que rotar el ángulo menor (a) para dar una vuelta completa (n = 360º/a) o, al número de figuras idénticas que forman la figura completa.

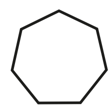
Así pues los polígonos regulares cumplen con una simetría de giro de orden igual a su número de lados.



Simetría de orden 3



Simetría de orden 5



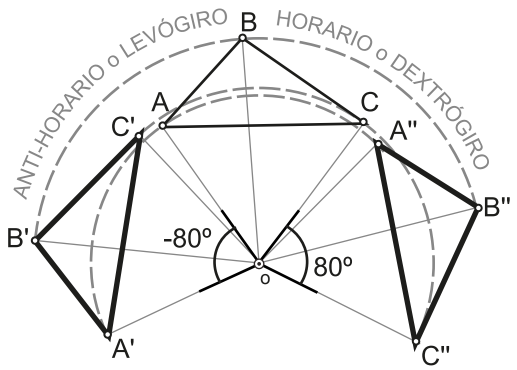
Simetría de orden 7

GIRO O ROTACIÓN

Es una transformación geométrica en la que intervienen: un **centro**, una **magnitud angular** y un **sentido de giro**.

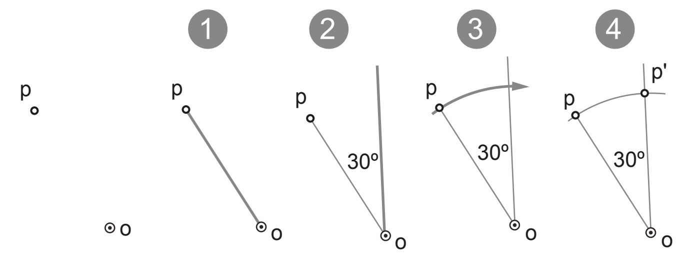
El **sentido** puede ser **horario** (positivo) o **antihorario** (negativo).

El giro, como operación geométrica mantiene la igualdad de las figuras pero no la identidad, ya que con el giro cambia la orientación de las mismas



GIRO DE UN PUNTO (p) RESPECTO A UN CENTRO (o):

Girar el punto p 30º, en sentido horario, respecto al centro o.



1º- Trazamos el segmento op.

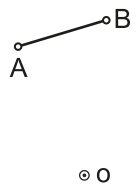
2º- Con vértice en o, ayudandonos del cartabón o transportador de ángulos trazamos otro segmento que determina un ángulo de 30º.

3º- Con centro en o y radio op trazamos un ángulo que corta al segmento anterior.

4º- En la intersección del arco con el segundo segmento tenemos el punto p', resultado degirar p 30º.

GIRO DE UN SEGMENTO (AB) RESPECTO A UN CENTRO (o):

Girar el punto AB 45 º respecto al centro o.

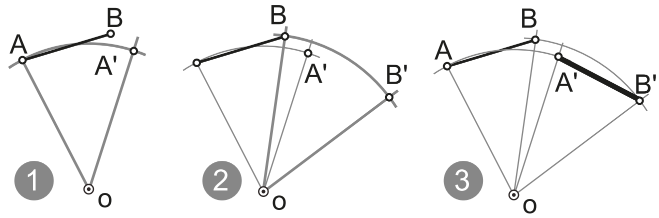


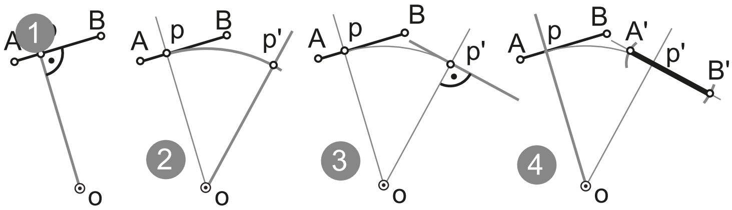
Por puntos:

1º- Empleando el procedimiento anterior, giramos el punto A.

2º- Igualmente giramos B.

3º- Unimos A' con B'.





Trazando perpendicular al segmento:

1º-Desde el cento o trazamos una perpendicular al segmento AB obteniendo p.

2º-Giramos p, obteniendo p'

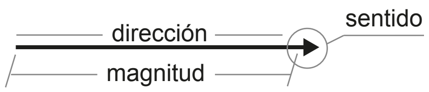
3º-Trazamos por p' una perpendicular a su radio.

4º- Sobre esta perpendicular, desde p,copiamos las distancias pA y pB. Trazamos el segmento A'B'.

TRASLACIÓN

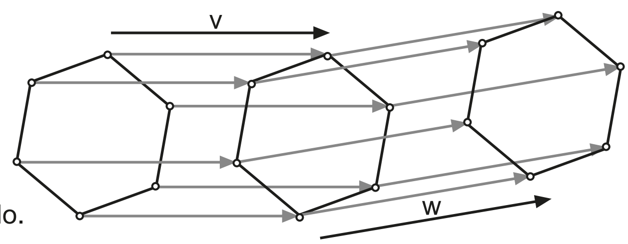
Es una transformación geométrica o movimiento en el plano que viene determinada por un vector. Un **vector** está determinado por una **magnitud** (distancia), **dirección** y **sentido**. Mantiene las relaciones geométricas de **igualdad e identidad**, ya que en una traslación únicamente cambia la posición pero no el tamaño, la forma o la orientación.

En toda traslación todos los puntos de las figuras geométricas obtienen un punto transformado siguiendo **vectores equipolentes** (con la misma magnitud, sentido y dirección) al vector de traslación.



Una traslación puede venir definida por:

1- Una figura y un vector de traslación.
2- Un par de puntos (original y trasladado.



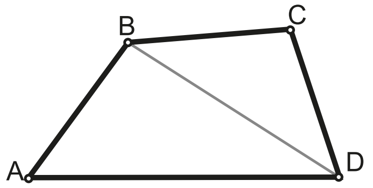
Es tán sencillo como hacer paralelas a la dirección del vector y en el sentido indicado por la flecha desde los vértices de la figura, copiando la magnitud con el compás, para obtener la figura transformada.

IGUALDAD

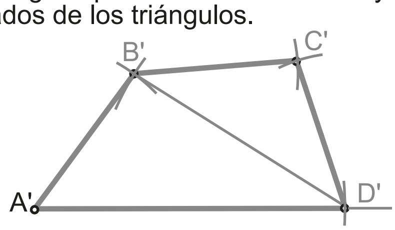
Dos figuras son iguales cuando mantienen la misma forma y el mismo tamaño. Dos figuras siguales siempre tendrán el mismo area. Para los polígonos la igualdad implica: mimas magnitudes ángulares en los vértices, misma magnitudes de los lados y por lo tanto igual superficie.

DADO EL CUADRILATERO ABCD, COPIARLO A PARTIR DE A': Por triangulación

Cualquier polígono de más de tres lados puede ser descompuesto en triángulos. Por esto, podemos descomponer el polígono que queremos copiar en los triángulos que proceda y copiar el polígono copiando los triángulos uno a uno. De este modo evitamos emplear el procedimiento de copia de ángulos que es algo impreciso si no somos muy cuidadosos y podemos copiar el polígono empleando unicamente la copia de los lados de los triángulos.

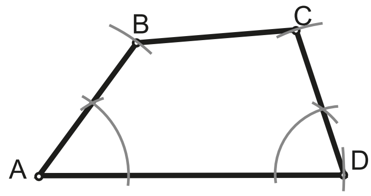


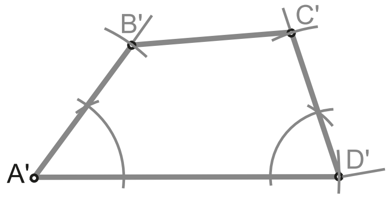
Primero copiamos el triángulo ABD a partir de A'. Una vez hecho esto copiaremos el triángulo BCD sobre el lado B'C'



DADO EL CUADRILÁTERO ABCD, COPIARLO A PARTIR DE A': Por copia de ángulos y segmentos

Simplemente debemos emplear los procedimientos de copia de ángulos y copia de segmentos para copiar el polígono a partir del punto dado.

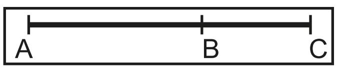




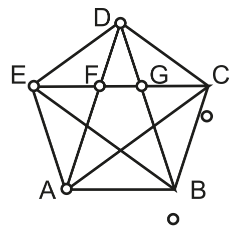
La proporción es la relación de medidas que hay entre dos partes o entre una parte y el todo

SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO:

La sección áurea de un segmento es un punto que lo divide en dos partes de tal modo que:
AC / AB = AB / BC = Φ = 1'6180...

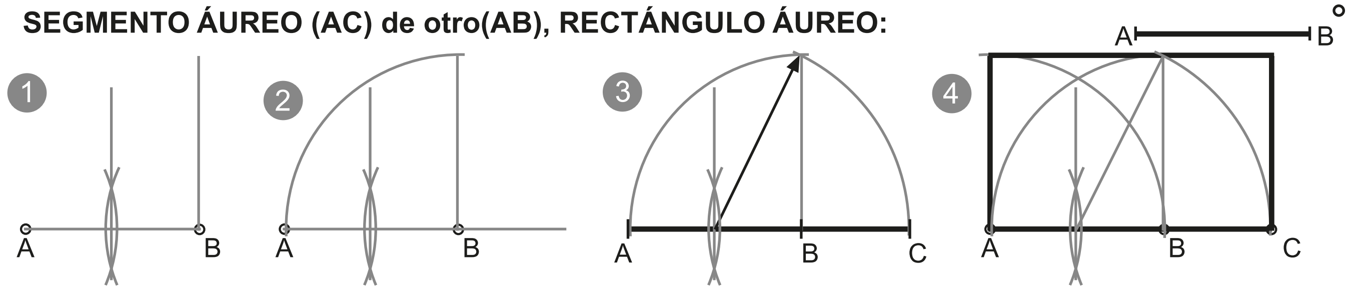


1,618
Φ
AB/BD
EF/EF



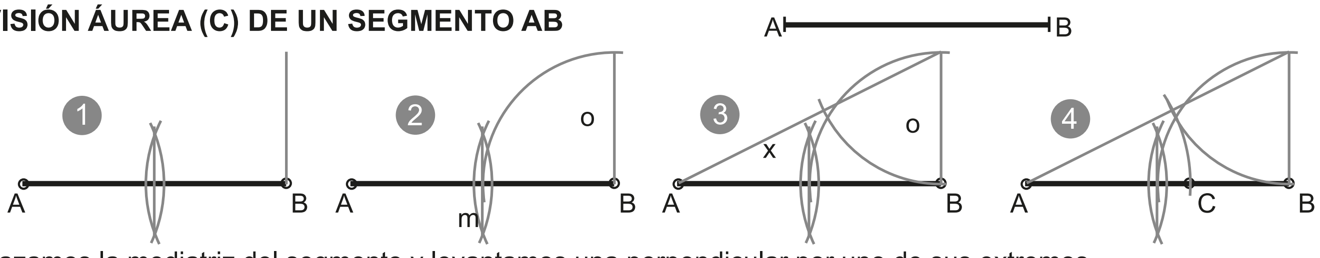
Φ tiene relación directa con las medidas del pentágono regular y el pentágono estrellado, así como con la sucesión de fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13...

SEGMENTO ÁUREO (AC) de otro(AB), RECTÁNGULO ÁUREO:



1º- Trazamos la mediatriz del segmento y levantamos una perpendicular por uno de sus extremos.
2º- Con centro en B y radio AB trasladamos la medida del segmento sobre la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto medio del segmento y radio hasta el extremo superior de la perpendicular giramos la distancia sobre la prolongación del segmento AB hayando C.
4º- Para trazar el rectángulo aureo construimos el rectángulo de lado menor AB y lado mayor AC.

DIVISIÓN ÁUREA (C) DE UN SEGMENTO AB



1º- Trazamos la mediatriz del segmento y levantamos una perpendicular por uno de sus extremos.
2º- Con centro en B y radio la mitad de Bm trasladamos la medida Bm sobre la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto (o) y radio oB giramos la distancia sobre el segmento Ao, obtenemos x.
4º- Con centro en A y radio Ax giramos la medida sobre el segmento AB obteniendo C.