1º BACH.

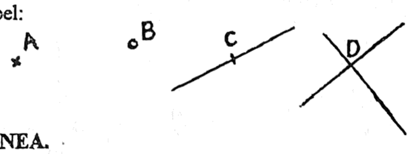
CONCEPTOS Y TRAZADOS GEOMÉTRICOS ELEMENTALES

I. CONCEPTOS.

1 .EL PUNTO.

Se entiende por punto a la mínima expresión gráfica (desde el punto de vista del mensaje gráfico). También se puede llamar punto a una porción tan sumamente pequeña de un cuerpo, superficie o línea, que carece de dimensión, es decir, de largo, ancho y grueso.

Existen diferentes formas de poder representarlo en un papel:



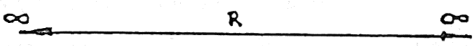
2. LA LÍNEA.

Se entiende por línea a una sucesión infinita de puntos. También se llama línea lo que tiene largo, pero no ancho ni grueso, es decir , algo que tan solo posee una dimensión.

Existen diferentes tipos de líneas, ya que éstas pueden ser rectas, curvas, poligonales o mixtas. Interesa en este tema que nos centremos en los dos primeros tipos:

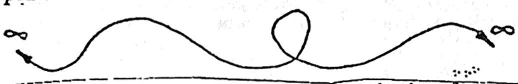
2.1 Recta.

Se entiende por recta a la línea en la que sus puntos se suceden en una misma dirección.

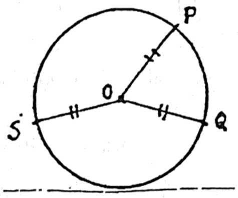


2.2. La curva. La circunferencia:

Se entiende por curva a la línea en la que sus puntos se suceden cambiando de dirección.

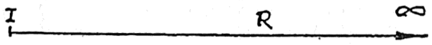


Interesa cuanto antes mencionar la circunferencia y el arco de circunferencia (porción de ésta), ya que es la curva que más se va a utilizar en dibujo técnico, y también interesa especialmente cómo la vamos a definir. La circunferencia se define como la curva cerrada y plana en la que todos sus puntos están a igual distancia (*equidistan*) de uno solo llamado centro.



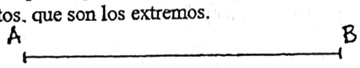
2.3. La semirrecta.

Se entiende por semirrecta a la recta que tiene un punto extremo (inicio).



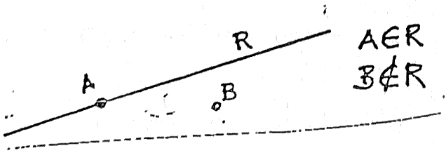
2.4. Segmento.

Se entiende por segmento a la porción de recta limitada por dos puntos, que son los extremos.



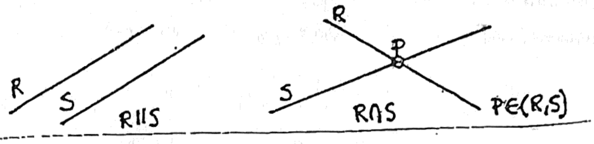
3. POSICIONES ENTRE PUNTO Y RECTA.

En el plano el punto podrá pertenecer a la recta o ser exterior a ella.

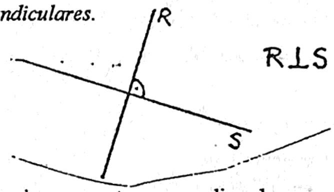


4. POSICIONES ENTRE RECTAS.

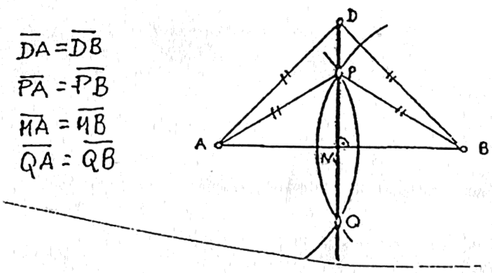
En el plano dos rectas podrán no cortarse (ser *paralelas*), o cortarse (*secantes*) teniendo un punto en común.



Merece hacer especial mención al caso específico siguiente: que dos rectas se corten dividiendo al espacio plano en cuatro sectores iguales, es decir, que las rectas formen un ángulo recto (90º). Cuando esto ocurre decimos que las rectas son *perpendiculares*.



Ahora es el mejor momento para explicar lo que es la **mediatriz de un segmento:** la recta que, siendo perpendicular al segmento, divide a éste en dos partes exactamente iguales. Se obtiene trazando arcos de igual radio y un poco mayores que la mitad del segmento y con centro en los extremos del segmento. Los arcos se cortarán en puntos de la mediatriz. Basta unirlos con una recta, la cual será la mediatriz buscada. Fijaos en algo importante: cada punto de la mediatriz está a igual distancia de los extremos del segmento.



5. DISTANCIA.

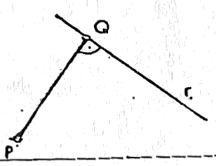
Se llama *distancia* a la longitud más corta entre dos elementos geométricos.

Entre dos Puntos

Es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

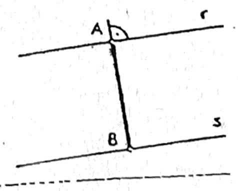
De un Punto a una Recta

Es la longitud del segmento $\overline{PQ}$, que resulta al trazar desde el punto P la perpendicular a r.



Entre dos Rectas paralelas

Es la longitud del segmento perpendicular $\overline{AB}$, comprendido entre las dos rectas paralelas r y s.



II. TRAZADOS.

Interesa estudiar los casos de trazados de *paralelismo y perpendicularidad entre rectas* usando, bien el compás y la regla, bien la escuadra y el cartabón.:

PERPENDICULARES

Trazar la perpendicular a un segmento en su punto medio (mediatriz de un segmento). Fig. 1

Considerando A B el segmento dado, con centro en sus extremos y radio mayor que la mitad del mismo, describir arcos, cuyas intersecciones, unidas entre sí, nos determinan la mediatriz al segmento.

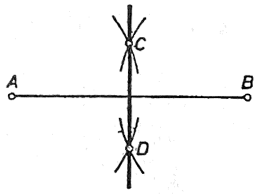


Fig. 1

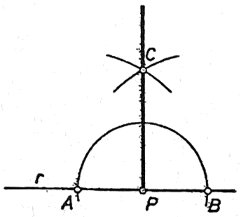


Fig. 2

Trazar la perpendicular a una recta por un punto de ella. Fig. 2.

Con centro en el punto dado P de la recta *r*, y con radio arbitrario, describir un arco que cortará a la recta en los puntos A y B. Con centro asimismo en estos puntos y radio mayor que la mitad del segmento que determinan A y B, describir arcos cuya intersección C unida con P resuelve el problema.

Trazar la perpendicular a una semirrecta en su origen (perpendicular a un segmento por uno de sus extremos).

Primer procedimiento. Fig. 3.

Con radio arbitrario, pero fijo, describir sucesivamente arcos de circunferencia en los puntos P (dado) y A, B, C (obtenidos), determinando finalmente el punto D. Unir D con P para obtener la perpendicular buscada.

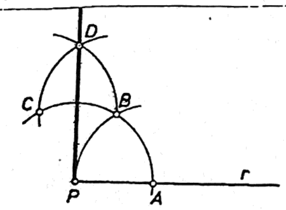


Fig. 3

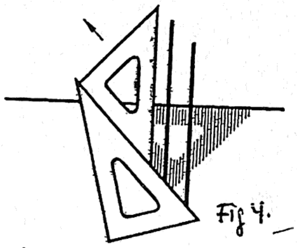


Fig 4.

Trazar rectas perpendiculares a una recta dada, con las plantillas de dibujo. Fig. 4

PARALELAS

Trazar una paralela a una recta por un punto exterior a ella. Fig. 5

Por un punto exterior a una recta, sólo se puede trazar una paralela a dicha recta (postulado de Euclides).

Elegido un punto cualquiera de la recta, punto M, trazar con centro en el mismo un arco de circunferencia que pase por el punto dado P y corte a la recta en dos puntos A y B. Transportar la cuerda P B a partir de A sobre la semicircunferencia, obteniendo el punto C, que unido con P nos proporciona la paralela pedida.

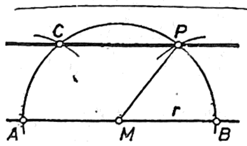


Fig. 5

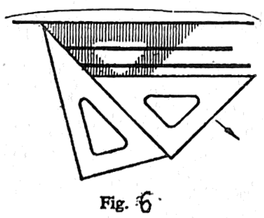


Fig. 6

Trazar, con las plantillas de dibujo, paralelas a una recta dada.

Situado el cartabón, . . . , o la escuadra, *fig. 6* , de forma que sus hipotenusas coincidan con la recta dada, adosarle la otra plantilla que se mantendrá inmóvil. Deslizando la primera plantilla sobre la fija, podemos trazar por su hipotenusa recta paralelas a la dada.

III. OPERACIONES ELEMENTALES CON SEGMENTOS.

Existe una gran variedad de operaciones con segmentos. Para este tema en cuestión, que va solo de conceptos elementales, vamos a tratar solo la *adición* o *suma* de segmentos, la *resta*, la *multiplicación* por un número y la *división en partes iguales*.

Dados dos segmentos rectilíneos, obtener la suma de ambos. Fig. 7

Transportar los segmentos dados uno a continuación de otro.

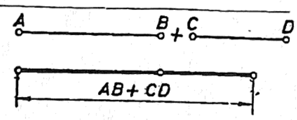


Fig. 7

Dado un segmento rectilíneo, restarle otro dado. Fig. 8

A partir de uno de los extremos del segmento mayor, transportar sobre el mismo el menor.

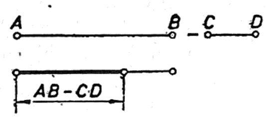


Fig. 8

Dado un segmento rectilíneo, hallar su producto por un número. Fig. 9

Repetir el segmento dado, como sumando, tantas veces como unidades indique el multiplicador.

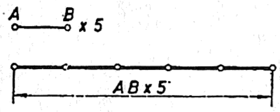


Fig. 9

Dividir un segmento rectilíneo en un número cualquiera de partes iguales. Fig. 10

Trazar una semirrecta con origen en uno de los extremos del segmento, formando cualquier ángulo, y transportar sobre la misma una magnitud fija, tantas veces como divisiones del segmento se desean realizar. La última división (en la figura la número 7) unirla con el otro extremo del segmento y trazar por las divisiones de la semirrecta, paralelas a 7 B, las cuales al cortar al segmento, lo dividen en partes iguales.

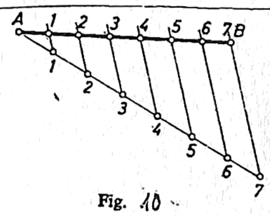


Fig. 10

ÁNGULOS.

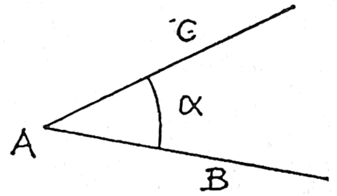
1. DEFINICIÓN DE ÁNGULO.

Es la porción de plano comprendida por dos semirrectas (lados) que parten de un mismo punto (vértice).

Su medición se establece por el sistema sexagesimal, basada en la división de una circunferencia en 360 partes iguales. A cada división le corresponde un grado. Cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Ejemplo: 47°18´43´´.Para ello nos solemos ayudar del transportador de ángulos (goniómetro).

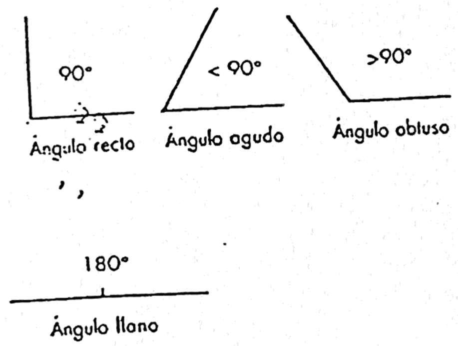
2. DESIGNACIÓN.

CAB, <A, Â, α

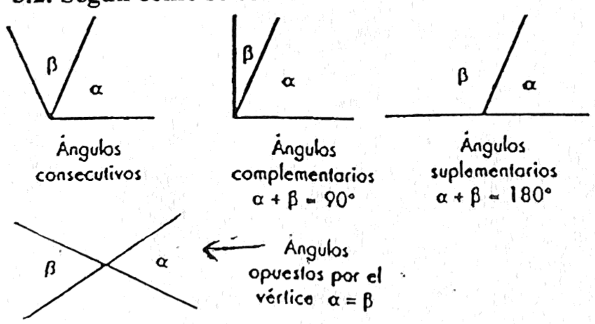


3. CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS.

3.1. Según su apertura.



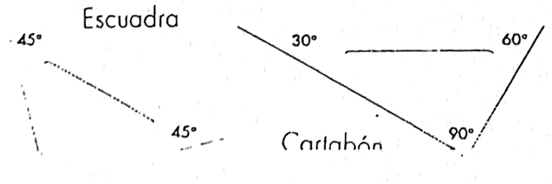
3.2. Según cómo se combinan entre sí.



4. ÁNGULOS DE LA ESCUADRA Y EL CARTABÓN.

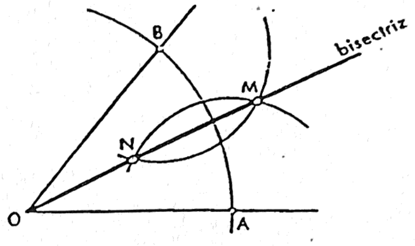
La escuadra es un triángulo isósceles rectángulo, con dos ángulos de 45° y uno de 90°.

El cartabón es un triángulo escaleno y rectángulo, con ángulos de 90°, 60° y 30°.



5. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

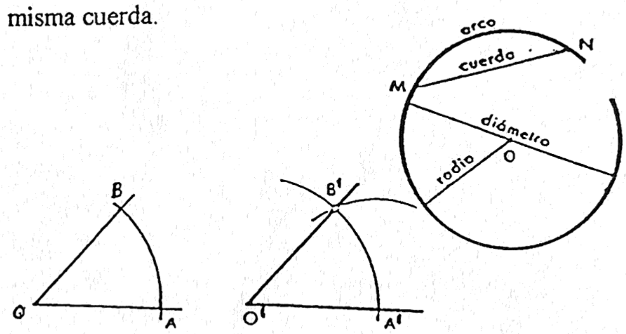
Es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales, pasando por el vértice del ángulo. Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.



6. OPERACIONES CON ÁNGULOS Y CONSTRUCCIÓN.

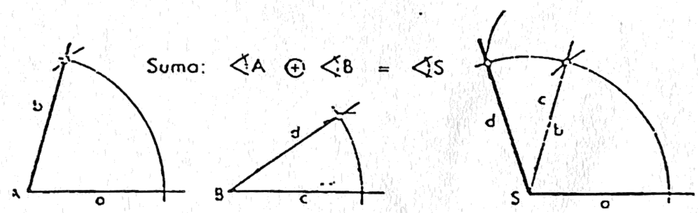
6.1 Transporte de un ángulo con el compás.

Dado que todo arco de circunferencia de igual radio le corresponde la misma cuerda, para copiar un ángulo dibujamos un mismo arco sobre una semirrecta con centro en el extremo de ella y luego transportamos con el compás la misma cuerda.



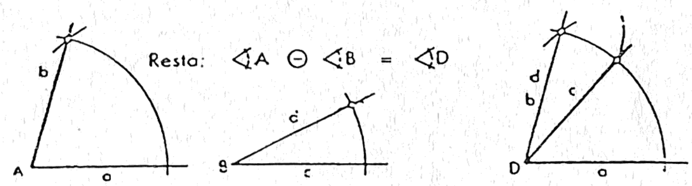
6.2. Suma de ángulos.

Bastará, por el procedimiento 6.1 colocar los ángulos de manera consecutiva.

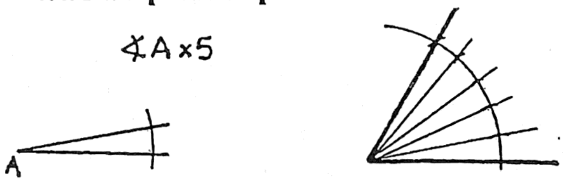


6.3. Resta de ángulos.

Igual procedimiento, pero quedando de forma consecutiva el ángulo con menor apertura y la diferencia restante.

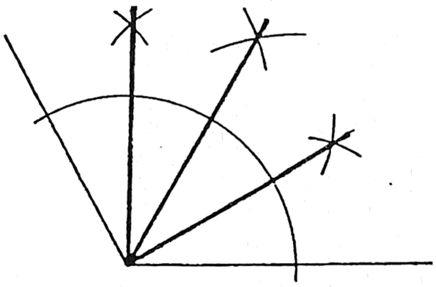


6.4. Multiplicación por un número.

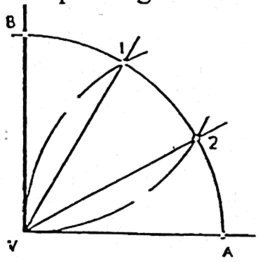


6.5. División de un ángulo en partes iguales.

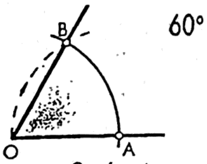
El procedimiento común es efectuar divisiones a base de bisectrices, aunque siempre quedarán divisiones pares.



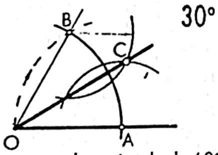
Es imposible, con compás y regla **trisecar** un ángulo. Tan solo se pueden dividir en tres partes iguales el ángulo recto y el llano.



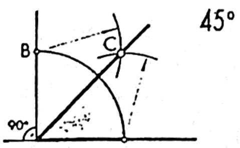
6.6. Construcción de ángulos con el compás y la regla.



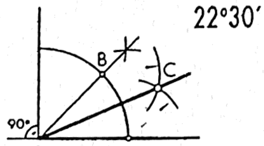
Con centro en O y A se trazan arcos de igual radio, que se cortan en B.



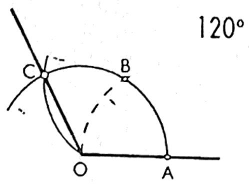
Biseccionando un ángulo de 60°: 60°/2 = 30°.



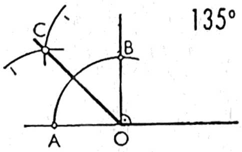
Biseccionando un ángulo de 90°: 90°/2 = 45°.



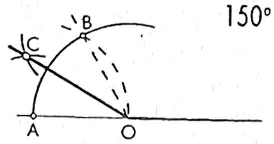
Biseccionando un ángulo de 45°: 45°/2 = 22° 30′.



60° + 60° = 120°

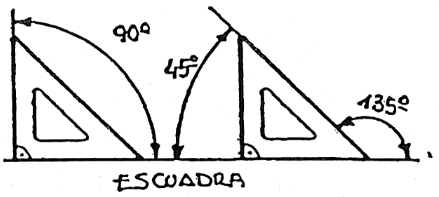


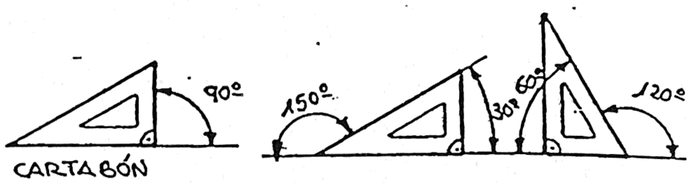
180° − 45° = 90° + 45° = 135°

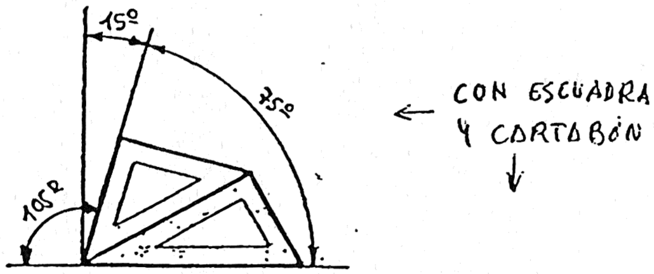


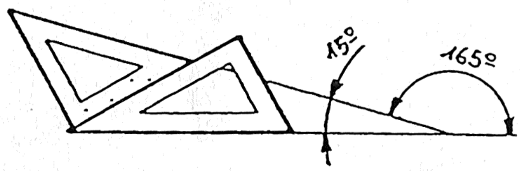
180° − 30° = 90° + 60° = 150°

6.7. Construcción de ángulos con la escuadra y el cartabón.





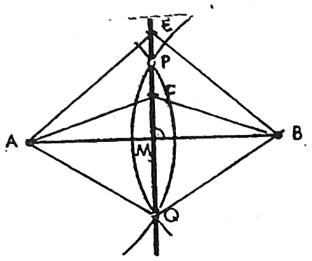




LUGARES GEOMÉTRICOS

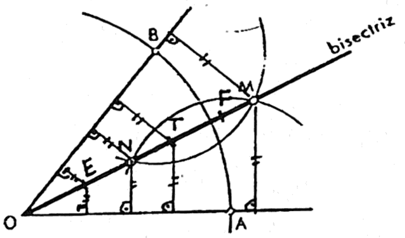
Definición de lugar geométrico: es el lugar que ocupa un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición o poseen una misma propiedad.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (que se encuentran a igual distancia) de los extremos del segmento.

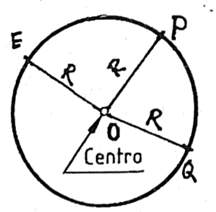


$\overline{EA} = \overline{EB}$
$\overline{FA} = \overline{FB}$
$\overline{MA} = \overline{MB}$
$\overline{QA} = \overline{QB}$

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.

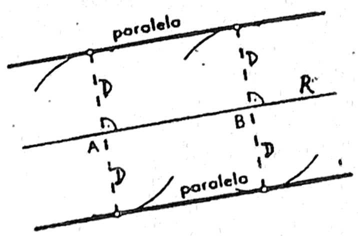


CIRCUNFERENCIA. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan una distancia R (radio) de un punto O (centro).



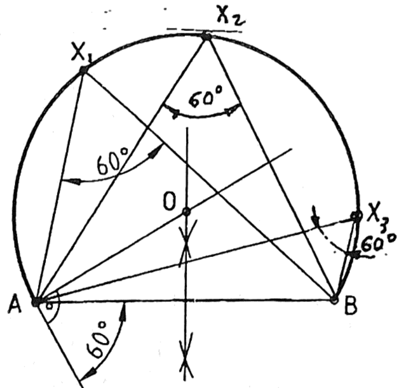
$\overline{EO} = \overline{PO} = \overline{QO} = R.$

RECTA PARALELA. Es el lugar geométrico de los puntos de plano que se encuentran a igual distancia D de una recta R.



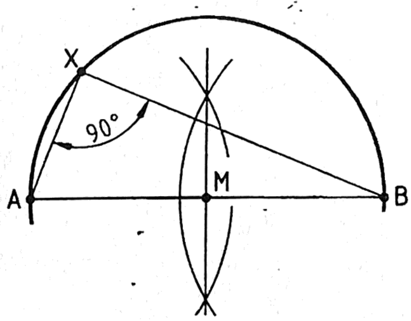
ARCO CAPAZ DE UN ÁNGULO RESPECTO A UN SEGMENTO.

Es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que abarca el segmento bajo un mismo ángulo.



arco capaz de 60° para el segmento $\overline{AB}$.

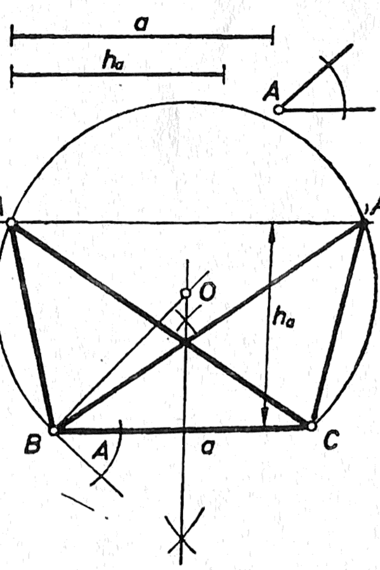
El arco capaz de un ángulo de 90 grados es una semicircunferencia de diámetro igual al segmento dado.



EJEMPLO DEL USO DEL ARCO CAPAZ.

Construir los posibles triángulos conocidos el lado **a,** la altura **ha** correspondiente al lado **a** y el ángulo **A**

Se traza el lado **a** y se halla el arco capaz del ángulo **A** para ese lado. Se traza una paralela al lado a la distancia de **ha.** La intersección del arco capaz con la paralela nos determina las dos posiciones posibles donde puede estar el vértice del ángulo **A.** De tal manera que salen dos soluciones.



GEOMETRÍA MÉTRICA PLANA

ELEMENTOS BÁSICOS: PUNTOS, RECTAS Y LÍNEAS

- **Punto:** Es el lugar geométrico donde se cortan dos líneas, el origen de una semirrecta, etc... se designan por un una letra mayúscula (A, B, C,..) o por un número. Cuando se puede determinar la posición de un punto se le llama ***punto propio***, por contra, cuando no se puede situar éste (está en ele infinito) se le denomina ***punto impropio.***
- **Línea Recta:** Es una sucesión de puntos continua con dos sentidos y una única dirección
- **Semirrecta:** Una sucesión de puntos continua cuyo origen conocemos, tiene un sólo sentido y una única dirección.
- **Segmento Recto:** Porción de recta limitada por dos puntos.
- **Línea Curva:** Sucesión de puntos no situados en una misma dirección.
- **Línea Poligonal o quebrada:** Está formada por segmentos rectos unidos por sus extremos con direcciones diferentes. Los segmentos se denominan lados y los puntos comunes vértices.
- **Línea Horizontal:** Recta paralela a la línea del horizonte, todos sus puntos tienen la misma cota.
- **Línea Vertical:** Recta que sigue la dirección de todos los cuerpos al caer.
- **Línea Inclinada u oblicua**: Cualquier recta que no sea horizontal ni vertical.
- **Rectas perpendiculares:** Las rectas que al cortarse dividen al plano en cuatro ángulos rectos.
- **Rectas paralelas**: Aquellas que siguen una misma dirección. Se cortan en el infinito (punto impropio).
- **Rectas concurrentes:** Rectas no paralelas, se cortan en un punto propio

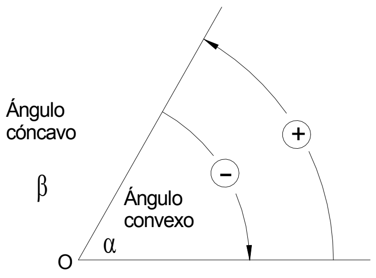


ILUSTRACIÓN Nº 1

ÁNGULOS.
Un ángulo se puede designar por las dos rectas que lo forman (ángulo ab), por un punto de cada uno de sus lados y el vértice (ángulo AOB), también se puede designar por una letra griega, etc....
Generalmente el valor de un ángulo se toma a partir de una horizontal y en el **sentido contrario a las agujas del reloj (levógiro)**, esta será nuestra referencia a partir de ahora. (Ilustración nº 1).
Ángulo Cóncavo y Convexo: Dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos, dos cóncavos y dos convexos. (ilustración nº 1)

Clases de Ángulos: Los ángulos se miden en grados sexagesimales. Cada grado tiene 60 minutos y cada minuto 60 segundos. Los ángulos se pueden clasificar según su abertura que presentan o según su posición:

***Según su abertura:** (Ilustración nº 2).

- Ángulo Llano: Mide 180 Grados.
- " Recto: " 90 "
- " Agudo Menor de 90 Grados.
- Ángulo Obtuso mayor de 90 grados y menor de 180 grados.
- Ángulo Cóncavo mayor de 180 grados y menor de 360 grados.

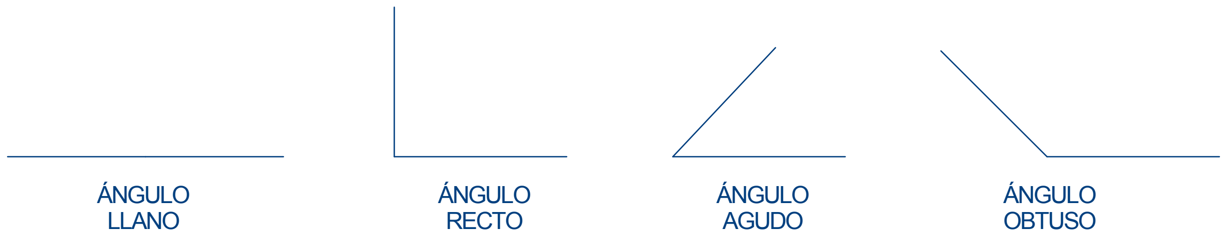


ILUSTRACIÓN Nº 2

***Según la posición:** (Ilustración nº 3)

- Ángulos consecutivos o contiguos: Tiene el mismo vértice y un lado en común
- Ángulos adyacentes: Son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes están en línea recta, formando un ángulo de 180º.
- Ángulos opuestos por el vértice: Aquellos en que da uno está formado por la prolongación de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Ángulos complementarios: Los que sumados valen un ángulo recto (90º).
- Ángulos suplementarios: Aquellos que sumados valen un llano (180º).

ILUSTRACIÓN Nº 3

4.4 Trazado de ángulos con escuadra y cartabón

ficha de los ángulos

La utilización individual o combinada de la escuadra y el cartabón (Fig. 19) nos permite trazar líneas, con una inclinación respecto a la horizontal múltiplo de 15°.

En la figura 20, observamos las posiciones de la escuadra y el cartabón para poder conseguir diferentes ángulos desde 0° a 180°.

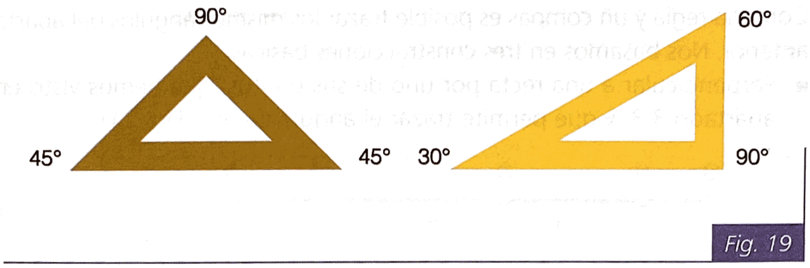


Fig. 19

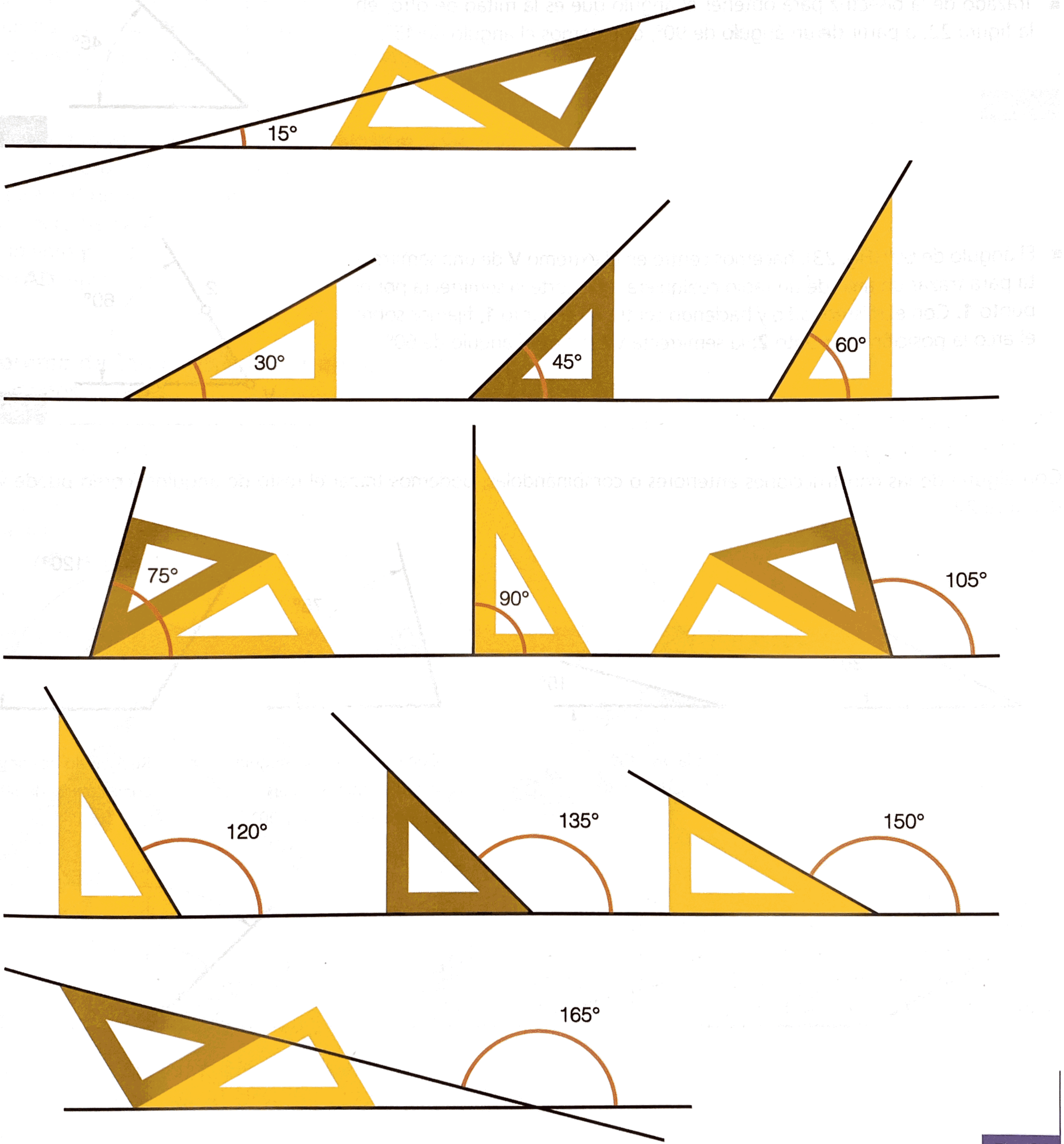


Fig. 20

4.3 Igualdad de ángulos

Los ángulos de lados paralelos dispuestos en el mismo sentido o en el contrario son iguales.

Si un lado está colocado en el mismo sentido y el otro en sentido contrario, los ángulos son suplementarios (Fig. 16).

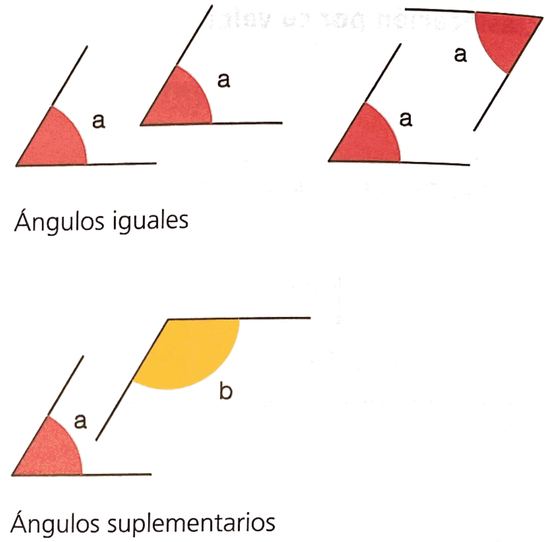


Fig. 16

Dos ángulos con los lados respectivamente perpendiculares son iguales o suplementarios (Fig. 17).

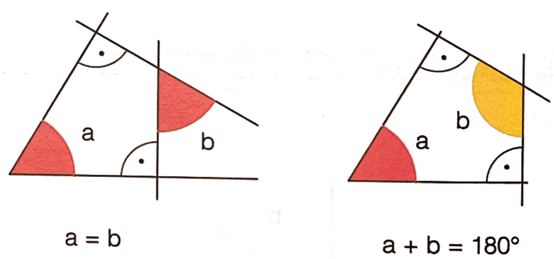


Fig. 17

Cuando se cortan dos rectas paralelas por una secante (Fig. 18), se determinan ocho ángulos. Aplicando los criterios anteriores de igualdad (opuestos por el vértice y de lados paralelos) podemos establecer la igualdad de los ángulos **1, 4, 5** y **8;** también la de los ángulos **2, 3, 6** y **7.**

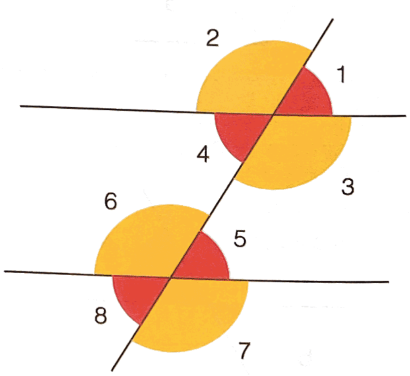
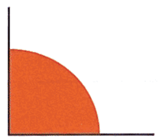


Fig. 18

4.1 Clasificación por su valor

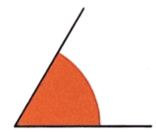
RECTO

Es cada uno de los ángulos que forman dos rectas perpendiculares; es la cuarta parte de la circunferencia y tiene un valor de 90°.



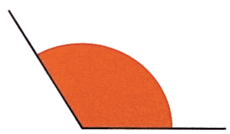
AGUDO

Es el ángulo menor que un ángulo recto.



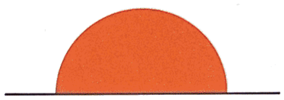
OBTUSO

Es el ángulo mayor que un ángulo recto.



LLANO

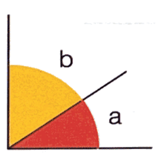
Es el ángulo formado por dos semirrectas opuestas; es la mitad de una circunferencia y tiene un valor de 180°.



4.2 Clasificación en relación con otros ángulos

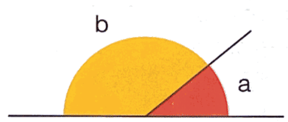
COMPLEMENTARIOS

Son dos ángulos que suman 90°.



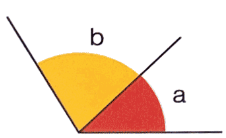
SUPLEMENTARIOS

Son dos ángulos que suman 180°.



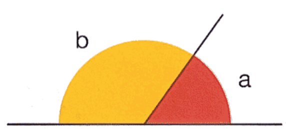
CONSECUTIVOS

Son dos ángulos con un lado común.



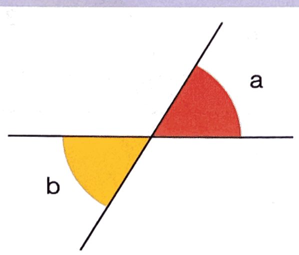
ADYACENTES

Son dos ángulos consecutivos y suplementarios.



OPUESTOS POR EL VÉRTICE

Sus lados son semirrectas opuestas. Siempre son iguales.



4.5 Trazado de ángulos con compás

Con una regla y un compás es posible trazar los mismos ángulos del apartado anterior. Nos basamos en tres construcciones básicas:

- Perpendicular a una recta por uno de sus puntos, que hemos visto en el apartado 3.3, y que permite trazar el ángulo de 90° (Fig. 21).

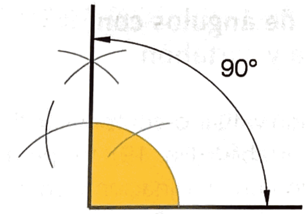


Fig. 21

- Trazado de la bisectriz para obtener el ángulo que es la mitad de otro; en la figura 22, a partir de un ángulo de 90°, obtenemos el ángulo de 45°.

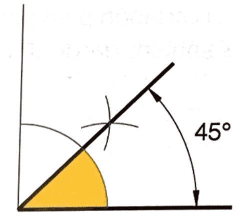


Fig. 22

- El ángulo de 60° (Fig. 23): hacemos centro en el extremo **V** de una semirrecta para trazar un arco de un radio cualquiera, que corte la semirrecta por el punto **1.** Con el mismo radio y haciendo centro en el punto **1,** fijamos sobre el arco la posición del punto **2;** la semirrecta **V2** define el ángulo de 60°.

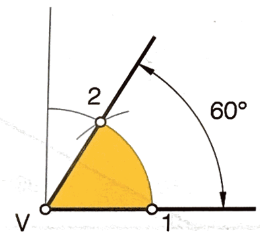
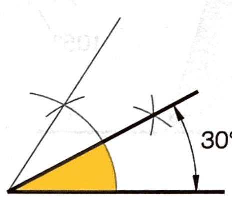
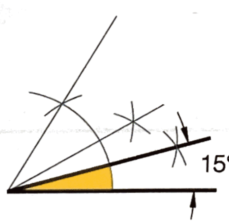


Fig. 23

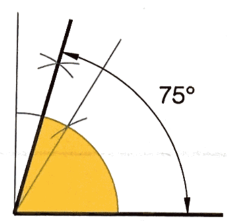
Con alguna de las construcciones anteriores o combinándolas, podemos trazar el resto de ángulos, como puede verse en la figura 24.



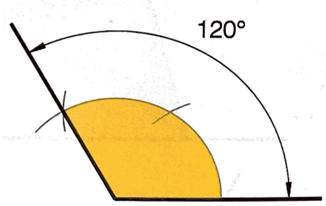
Con la bisectriz del ángulo de 60°



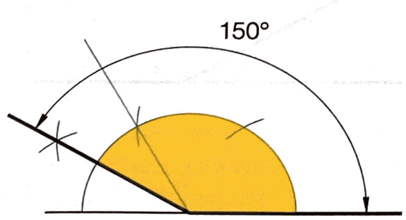
Con la bisectriz del ángulo de 30°



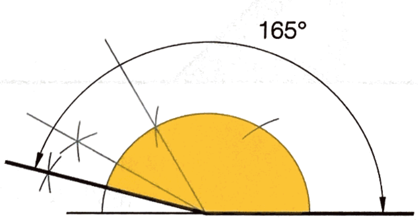
Con la bisectriz del ángulo comprendido entre las semirrectas de 60° y 90°



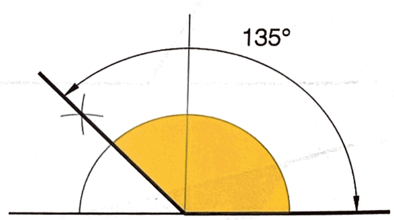
Realizando dos ángulos consecutivos de 60°



Con la bisectriz del ángulo comprendido entre las semirrectas de 120° y 180°



Con la bisectriz del ángulo comprendido entre las semirrectas de 150° y 180°



Con la bisectriz del ángulo comprendido entre las semirrectas de 90° y 180°

Fig. 24

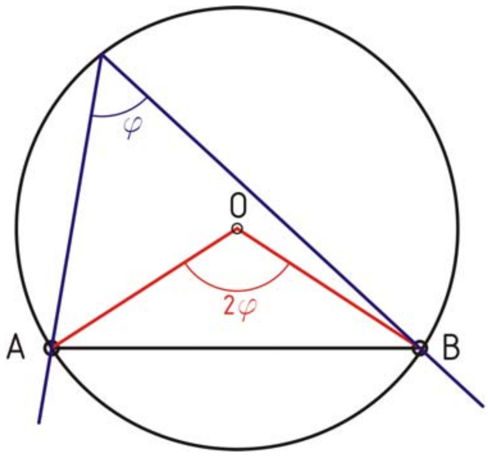
Arco capaz

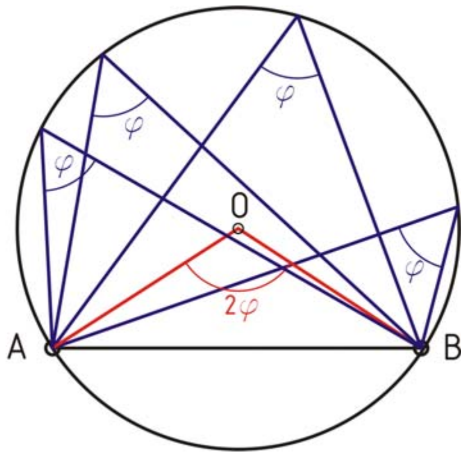
1. Arco capaz de un ángulo sobre un segmento

Debemos conocer la relación de los ángulos con la circunferencia. Según sus situaciones relativas encontramos estos tipos de ángulos: central, inscrito, semiinscrito, interior, exterior y circunscrito.

Conocer las propiedades y la utilización del *ángulo inscrito* nos ayudará a resolver diferentes problemas geométricos.

Ángulo inscrito es aquel cuyo vértice está en un punto de la circunferencia y sus lados la cortan en dos puntos (*A* y *B*). El ángulo central de la circunferencia cuyos lados pasan por los dos puntos mide el doble que el ángulo inscrito.





Se deduce que todos los ángulos inscritos cuyos lados corten a la circunferencia en *A* y *B* tienen el mismo ángulo, la mitad que el ángulo central.

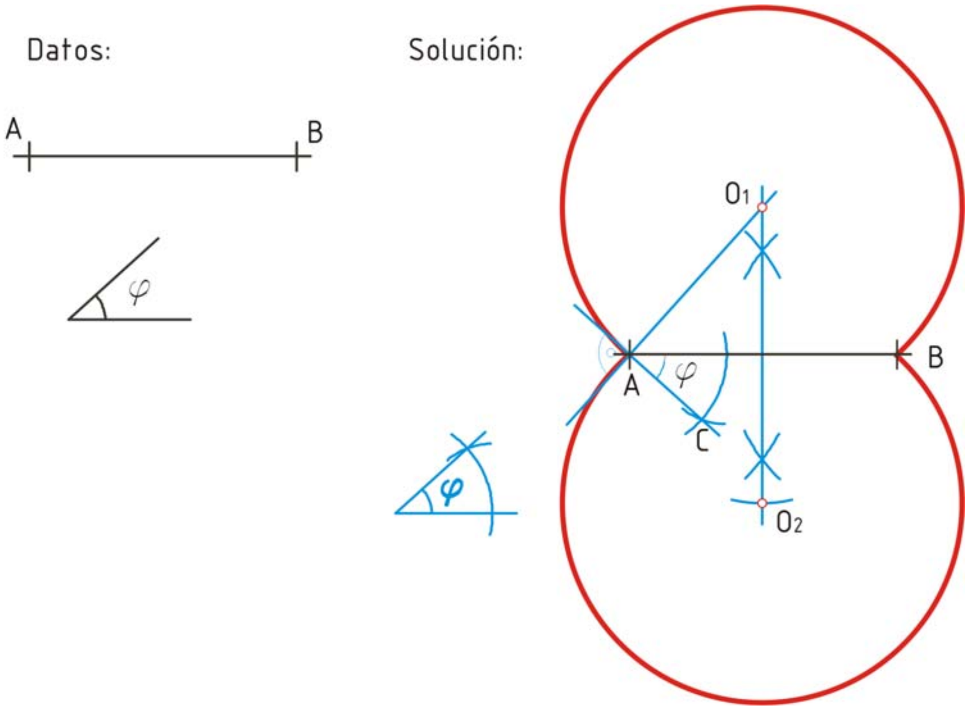
Se llama arco capaz de un ángulo φ sobre un segmento *AB*, al lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales a él cuyos lados pasan por los extremos del segmento.

Aunque en la ilustración superior sólo se presenta un arco capaz, existiría un segundo arco simétrico cuyo eje de simetría es la recta que contiene al segmento *AB*.

2. Construcción del arco capaz

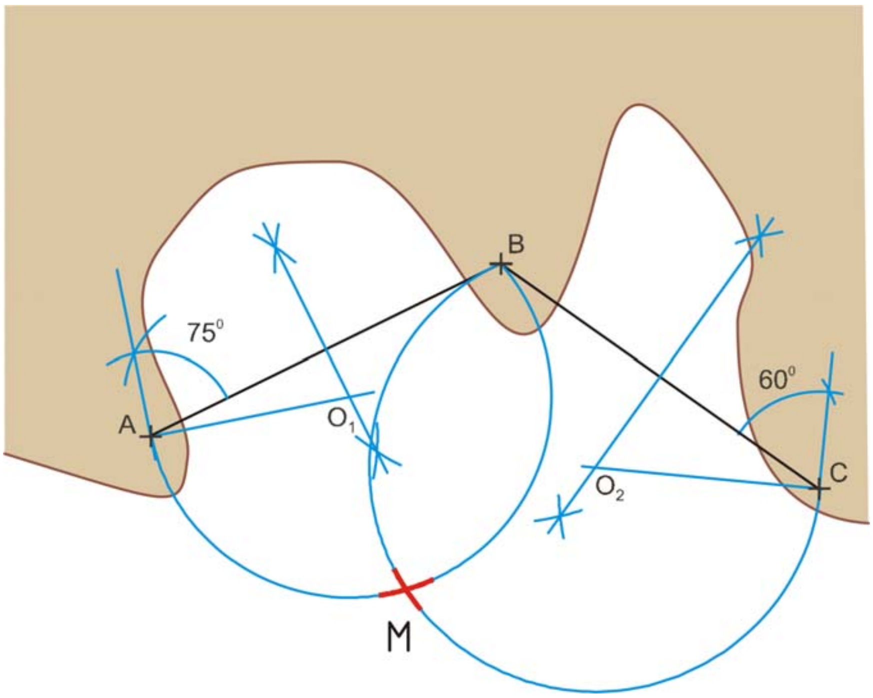
Dados el segmento *AB* y el ángulo φ, construir los arcos capaces bajo los que se ve el segmento *AB* con un ángulo φ.

1. Se traza la mediatriz de *AB*.
2. Se transporta el ángulo φ a partir del lado *AB*, se sitúa su vértice en unos de los extremos (*A*), en el semiplano opuesto al que obtendremos el arco capaz.
3. Se traza, por su vértice, la perpendicular al lado obtenido *AC*, la intersección O_1 de la perpendicular con la mediatriz es el centro del arco capaz.
4. El centro O_2 del otro arco, lo obtenemos pasando al otro lado de la mediatriz la distancia de O_1 al segmento.



- **Ejercicio:**

Desde un barco *M* se ven tres faros situados en la costa *A*, *B* y *C*, midiendo el ángulo bajo el que se ven resultan 75º para *A* y *B*, y 60º para *B* y *C*. Situar la posición del barco.



Para situarlo en la carta náutica se trazan los arcos capaces correspondientes a dichos ángulos. El punto de intersección *M* da la posición del barco.